問題１

［１］ Ａ，Ｂの２人が「あっち向いてホイ」をする。

【「あっち向いてホイ」のルール】

まず，ＡとＢが１回じゃんけんをして「優」「劣」(勝ち負け)を決める。

（ⅰ）「優」「劣」が決まらない場合は「あいこ(引き分け)」とする。

（ⅱ）「優」「劣」が決まった場合は，「優」側は上下左右の４方向のいずれかを指差し，「劣」側は上下左右の４方向のいずれかに顔を向ける。このとき，指差した方向と向いた方向が一致した場合は「優」側の勝ちとし，一致しなかった場合は「あいこ」とする。

⑴ Ａが１回のじゃんけんで「優」側になる確率を求めよ。

⑵ Ａが１回の「あっち向いてホイ」で勝つ確率を求めよ。

⑶ １回の「あっち向いてホイ」で「あいこ」になる確率を求めよ。

［２］ Ａ，Ｂ，Ｃの３人が「あっち向いてホイ」をする。

【３人による「あっち向いてホイ」のルール】

まず，３人が１回「じゃんけん」をする。

（ⅰ）「優」「劣」が決まらない場合は「あいこ」とする。

（ⅱ）「優」「劣」が決まった場合は次のとおりとする。

① 「優」が２人で「劣」が１人のときは，「優」の２人がともに指差し，「劣」の１人が顔を向ける。「優」 の２人のうち少なくとも一方が「劣」と一致したときは一致した「優」の勝ち(したがって，２人とも勝ちとなることもあり得る）とし，どちらとも一致しなかったときは「あいこ」とする。

② 「優」が１人で「劣」が２人のときは，「優」の１人が指差し，「劣」の２人が顔を向ける。「優」の指差した方向と「劣」の少なくとも一方が一致したときは「優」の勝ちとし，どちらとも一致しなかった場合は「あいこ」とする。

⑴ Ａが１回のじゃんけんで「優」側になる確率を求めよ。

⑵ Ａが１回の「あっち向いてホイ」で勝つ確率を求めよ。

⑶ １回の「あっち向いてホイ」で，Ａが１人に勝つと10点，同時に２人に勝つと20点がもらえるものとする。このとき，Ａがもらえる点数の期待値を求めよ。

$\boxed{\text{着眼点}}$

「あっち向いてホイ」は多くの人が知っていると思いますが，本問ではこれを３人で行う場合に拡張しています。したがって，用語の定義やルールを正しく理解できるかが重要です。また，起こり得る場合を重複なく，かつ，もれなく数え上げることが大切です。また，数え上げの際に，余事象の考え方を上手に利用できると効率よく計算できます。

$\boxed{\text{解答例}}$

〔1〕(1)　起こりえる場合の数は　$3\times3=9$　　Ａが「優」になるのは３通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(2)　１回のじゃんけんで，Ａが「優」になる確率は　$\dfrac{1}{3}$

このとき，Ａが指差す方向とＢが向く方向が一致するのは　$\dfrac{4}{4\times4}=\dfrac{1}{4}$

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

(3)　(ｱ)１回のじゃんけんで「あいこ」になる確率は　$\dfrac{1}{3}$

(ｲ)１回のじゃんけんで「優」「劣」が決まる場合

Ａが「優」になる確率は　$\dfrac{1}{3}$

Ａが指差す方向とＢが向く方向が一致しない確率は　$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

ゆえに，Ａが「優」になって「あいこ」になる確率は　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

Ｂが「優」になる場合も同様なので，１回のじゃんけんで「優」「劣」が決まり，「あいこ」になる確率は　$\dfrac{1}{4}\times2=\dfrac{1}{2}$

よって，求める確率は(ｱ)＋(ｲ)より　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$

《別解》

１回の「あっち向いてホイ」で「あいこ」になる事象の余事象は，１回の「あっち向いてホイ」でＡかＢが勝つ事象なので　$1-\dfrac{1}{12}\times2=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

〔2〕(1)　起こりえる場合の数は　$3\times3\times3=27$

Ａ１人が「優」になるのは３通り

ＡとＢの２人またはＡとＣの２人が「優」になるのは６通り

よって，Ａが「優」になるのは　$3+6=9$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

(2)　(ｱ)じゃんけんでＡ１人が「優」になる確率は　$\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

このとき，Ａが指差す方向とＢ，Ｃの少なくとも一方が向く方向が一致する確率は，余事象(Ａが指差す方向とＢ，Ｃの向く方向が一致しない事象)を考えて

$$1-\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

したがって，この場合，Ａが勝つ確率は　$\frac{1}{9}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{144}$

(イ)じゃんけんでＡ，Ｂ２人が「優」になる確率は　$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

このとき，Ａが指差す方向とＣが向く方向とが一致する確率は　$\frac{1}{4}$

したがって，この場合，Ａが勝つ確率は　$\frac{1}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$

(ウ)じゃんけんでＡ，Ｃ２人が「優」になる場合は(イ)と同様に考えられるので，

Ａが勝つ確率は　$\frac{1}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$

よって，Ａが１回の「あっち向いてホイ」で各確率は(ア)＋(イ)＋(ウ)より

$$\frac{7}{144}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{15}{144}=\frac{5}{48}$$

(3)　(エ)Ａが同時に２人に勝つ確率は，(2)(ア)においてじゃんけんでＡ１人が「優」になり，Ａが指差す方向とＢ，Ｃの２人が向く方向が一致するときであるから，その確率は　$\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{144}$

(オ)Ａが１人に勝つ確率は，(2)(ア)においてじゃんけんでＡ１人が「優」になり，Ａが指差す方向とＢ，Ｃのどちらか１人が向く方向が一致するときと(2)の(イ)(ウ)の場合であるから，その確率は　$\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times2\right)+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{24}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{72}$

ゆえに，求める期待値は　$20\times\frac{1}{144}+10\times\frac{7}{72}=\frac{10}{9}$(点)