【採点基準】

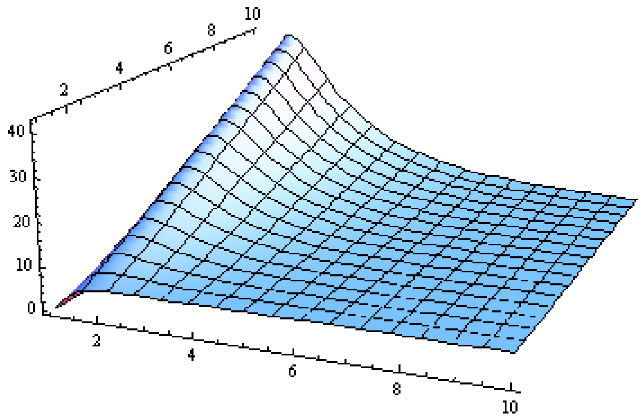
（１）６点（完全解答）　（２）６点　（３）７点

（４）７点　（５）７点　（６）７点

出題は「解析学序説」（一松信著）下巻 P119 から引用した。

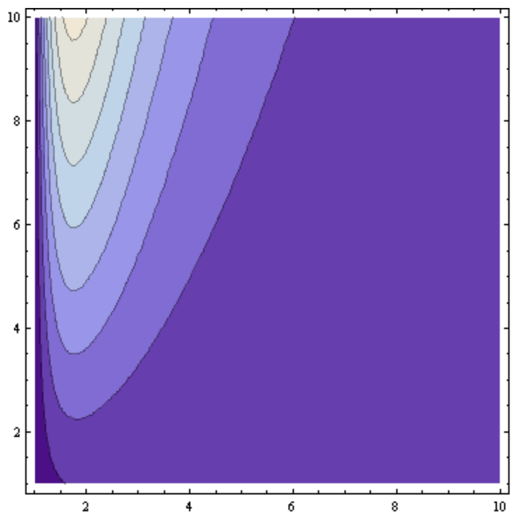
高さ１、半径１の円柱の側面積は２πである。

この円柱の高さをm等分し、周囲をｎ等分し、１つおきに半分ずつずらして円柱に内接する多面体を作る。この多面体は『シュワルツの提灯』と呼ばれている。



$$\text{全側面積} = 2\pi\ n \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+\left(2m\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)^2}$$

1880年にシュワルツによって指摘された問題である。この一見、単なる多面体による側面積の近似のように見えるが、実に不思議な近似方法なのです。大学に入学して２変数関数を学習するのですが、２変数 n,m の関数として、この側面積を



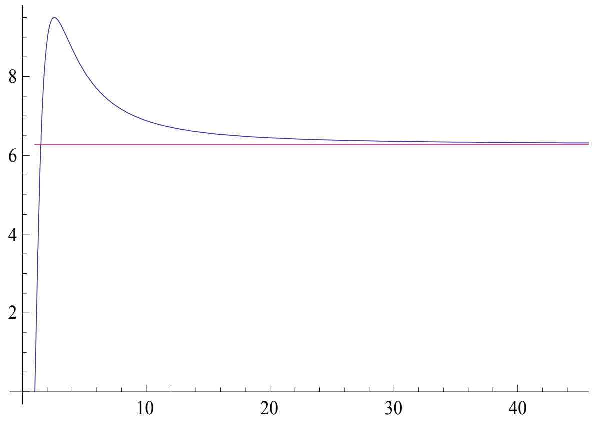
$$f(n,m) = 2\pi\ n \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+\left(2m\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)^2}$$

と定義する。

Mathematica で３次元の曲面を作図すると右上図となり、上から見た等高線を描くと右中図になる。

よく眺めると、$n=m$ のとき、分割数を増やしていくと、

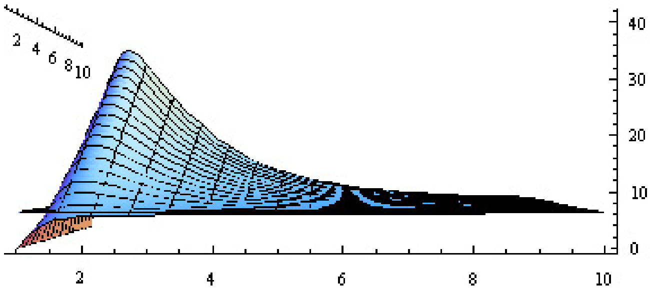
```
In[1]:= sur1[n_] := 2 n Sin[π/n] √(1 + n^2 (1 - Cos[π/n])^2) ;
        Limit[sur1[n], n → ∞]
Out[2]= 2 π
```



となり、円柱の側面積に近似していく。

ただ、右下図から分かるように、

一定の割合で２πに接近するのではなく、最大値を経て２πに接近しているこが見える。

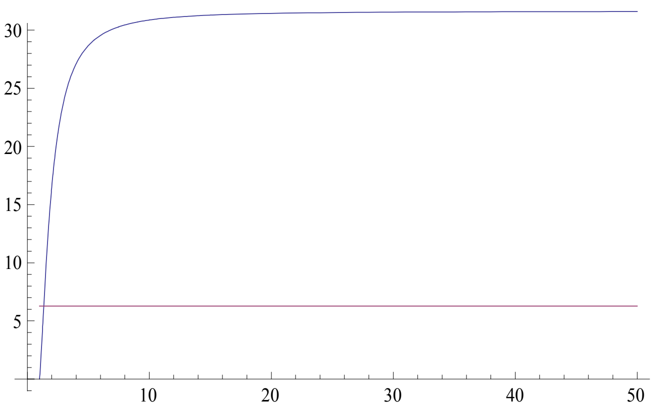


奇妙なことに、n よりも m の増加率を増やすと、２π に接近しないで、とんでもない値になってしまう。
同じ、円柱の側面積の近似であるはずなのに不思議さを感じる。
$m = n^4$ とすると

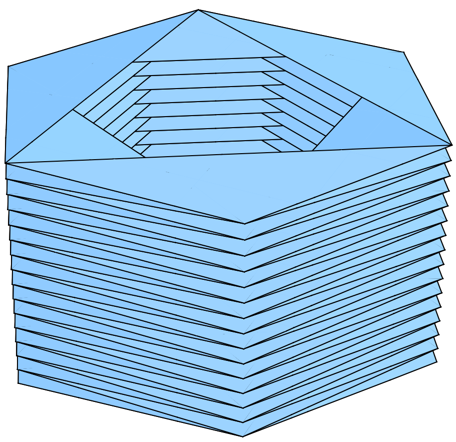
In[37]:= $\mathtt{sur}[n\_] := 2\,n\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{n}\right]\sqrt{1+n^4\left(1-\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{n}\right]\right)^2}$;

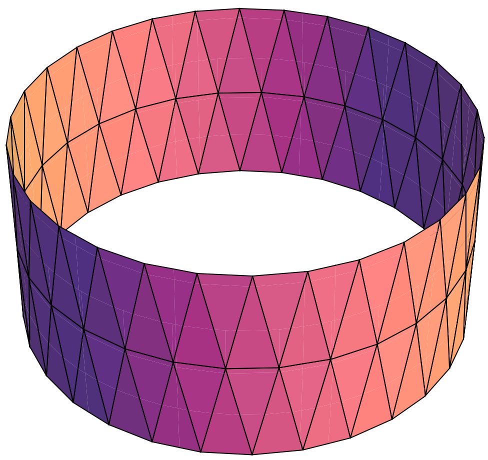
Limit[sur[n], n → ∞]

Out[38]= $\pi\sqrt{4+\pi^4}$



になり２π とはるかに異なる値に接近してしまう。（右グラフ）
場合によっては、無限大に発散してしまうことも実際ある。
実際、図からこの違いを実感してみよう。
下左図は、ｎ＝３，ｍ＝30 で作成した図形、下右図は、ｎ＝30，ｍ＝２で作成した図である。





この違いは直感的にも、異なる表面積に近似されることが分かると思う。ｍとｎがある特別な関係で無限大になると、表面積は２π になることなく、無限大になってしまう。
とても、不思議を感じる多面体である。

北海道札幌北高等学校
教諭　松本　睦郎