第４問　与えられた整数がある整数で割り切れるかどうかを簡単に調べる方法がある。

これから３桁の整数 523 を $523_{(10)}$ と表す。$523_{(10)}$ の $_{(10)}$ とは 10 進法で表すという意味であり，百の位の数の値は 5，十の位の数は 2，一の位の数は 3 ということで，$523_{(10)}=5\cdot 100+2\cdot 10+3$ と書き直すことができる。さらに一般の３桁の整数は $abc_{(10)}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$（ただし，$a$，$b$，$c$ は，$1\leqq a\leqq 9$，$0\leqq b\leqq 9$，$0\leqq c\leqq 9$ を満たす整数）と表すことができる。

(1)　下の例①，②を参考にして次の問いに答えなさい。

例①　与えられた数が２の倍数であるかどうかは，最も右側の桁（一の位）が２の倍数（偶数）であるかどうかを調べればよい。

理由　$abc_{(10)}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$ であるが，$a\cdot 100$，$b\cdot 10$ の２数はともに２の倍数である。２の倍数の和は２の倍数であるので，一の位の数 c が２の倍数であれば，$abc_{(10)}$ は２の倍数である。（一の位が０，２，４，６，８）

例②　与えられた数が３の倍数であるかどうかは，各桁の数の和（百の位の数 a と十の位の数 b と一の位の数 c の和 $a+b+c$）が３の倍数であるかどうかを調べればよい。

理由　$abc_{(10))}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$ であるが，$100=99+1$，$10=9+1$ より

よって，$a+b+c$ が３の倍数であれば，$abc_{(10)}$ は３の倍数である。

問）枠の中に，説明のための式や文章を入れて証明を完成させよ。

この方法は何桁の整数であっても用いることができる。

(2)　①を参考にして，ある３桁の整数が５の倍数であるかどうかを割り算せずに調べる方法を考えて説明せよ。また，その理由を説明せよ。

(3)　ある３桁の整数が 11 の倍数であるかどうかを調べる方法に次のような方法がある。

百の位の数字と一の位の数の和から十の位の数を引くと 11 の倍数になるとき，この３桁の整数は 11 の倍数である。たとえば，429 は $4+9-2=11$ より 11 の倍数であるが，実際に割り算すると，$429\div 11=39$ であり，429 は 11 の倍数になっている。

３桁の整数 $a49_{(10)}$ が 11 の倍数であるための整数 a の値を求めよ。

(4)　３桁の数字について(3)の方法が正しいことを説明せよ。

(5)　５桁の整数について 11 の倍数であるかどうかを調べる方法を考えて説明せよ。また，その理由を説明せよ。

着眼点

３桁の整数を $100a+10b+c$ と表して式を変形していくと考えやすいと思います。きちんと理由を説明できるでしょうか。

３の倍数については $a+b+c$ の形を，11 の倍数の場合は $a-b+c$ の形を作ることがポイントです。(5)の場合はかなり式変形が大変になりますが原理は同じで $a-b+c-d+e$ の形を使います。

解答例

(1)　$abc_{(10)}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$ であるが，$100=99+1$，$10=9+1$ より

$$
\begin{aligned}
a\cdot 100+b\cdot 10+c &= a(99+1)+b(9+1)+c\\
&=99a+9b+a+b+c\\
&=3(33a+3b)+a+b+c
\end{aligned}
$$

$33a+3b$ は整数であるから，$3(33a+3b)$ は３の倍数である。

よって，$a+b+c$ が３の倍数であれば，$abc_{(10)}$ は３の倍数である。

(2)　$abc_{(10)}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$ であるが，$a\cdot 100+b\cdot 10=5(20a+2b)$ は5の倍数であるので，c が５の倍数（０または５）であればよい。

(3)　$a49_{(10)}$ が 11 の倍数であるためには，$a+9-4=11$ とすると，$a=6$

別解　実際に割り算する手もある。

$a=1$ のとき $149\div 11=13$ 余り 6 より 11 の倍数でない。

$a=2$ のとき $249\div 11=22$ 余り 7 より 11 の倍数でない。

$a=3$ のとき $349\div 11=31$ 余り 8 より 11 の倍数でない。

……

$a=6$ のとき $649\div 11=59$ 余り 0 より 11 の倍数である。

……

$a=9$ のとき $949\div 11=86$ 余り 3 より 11 の倍数でない。

よって，11 の倍数となるのは，$a=6$ のときだけである。

(4)　$100=99+1$，$10=11-1$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
abc_{(10)} &= a\cdot 100+b\cdot 10+c\\
&=a(99+1)+b(11-1)+c\\
&=99a+11b+a-b+c\\
&=11(9a+b)+a-b+c
\end{aligned}
$$

$9a+b$ は整数であるから，$11(9a+b)$ は 11 の倍数である。したがって，$a-b+c$ が 11 の倍数ならば，$abc_{(10)}$ も 11 の倍数である。

(5)　５桁の整数の場合，$abcde_{(10)}=a\cdot 10000+b\cdot 1000+c\cdot 100+d\cdot 10+e$ とおける。

$10000=9999+1$，$1000=1001-1$，$100=99+1$，$10=11-1$ を用いると，

$9999=11\times 909$，$1001=11\times 91$，$99=11\times 9$ なので，

$$
\begin{aligned}
abcde_{(10)} &= a\cdot 10000+b\cdot 1000+c\cdot 100+d\cdot 10+e\\
&=a(9999+1)+b(1001-1)+c(99+1)+d(11-1)+e\\
&=9999a+1001b+99c+11d+a-b+c-d+e\\
&=11(909a+91b+9c+d)+a-b+c-d+e
\end{aligned}
$$

$909a+91b+9c+d$ は整数であるから，$11(909a+91b+9c+d)$ は 11 の倍数である。

よって，$a-b+c-d+e$ が 11 の倍数であれば，$abcde_{(10)}$ は 11 の倍数となる。

結論：(万の位の数)＋(百の位の数)＋(一の位の数)－(千の位の数)－(十の位の数) が 11 の倍数ならば，もとの数も 11 の倍数である。

発展的内容

教科書には載ってないが，合同式というものを使った解答もある。

【合同式の定義】

整数 a，b について，$a-b$ が m の倍数であるとき，<u>a と b は m を法として合同である</u>といい，

次のように表す。

$a \equiv b \pmod{m}$　（a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいと解釈できる）

【合同式の性質】

① $a \equiv a \pmod{m}$

② $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$

③ $a \equiv b \pmod{m}$ かつ $b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$

④ $a \equiv b \pmod{m}$ かつ $c \equiv d \pmod{m} \implies \begin{cases} a+c \equiv b+d \pmod{m} \\ a-c \equiv b-d \pmod{m} \\ ac \equiv bd \pmod{m} \end{cases}$

⑤ k が整数で $a \equiv b \pmod{m} \implies ka \equiv kb \pmod{m}$

⑥ n が自然数で $a \equiv b \pmod{m} \implies a^n \equiv b^n \pmod{m}$

これを使うと，例えば(4)の説明は次のようになる。

(4)　$100 \equiv 1 \pmod{11}$，$10 \equiv -1 \pmod{11}$ であるから，

$$abc_{(10)} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c \equiv a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = a - b + c \pmod{11}$$

したがって，$abc_{(10)}$ を 11 で割った余りと $a-b+c$ を 11 で割った余りは等しいので，

(百の位の数)+(一の位の数)−(十の位の数) が 11 の倍数ならば，もとの数は 11 の倍数である。

意欲のある人は(5)の説明もこのやり方で試みてください。参考書によってはこの合同式について記載しているものもあり，合同式を用いると表現が簡潔になる利点があります。

配点　(1)８点　(2)８点　(3)４点　(4)８点　(5)12点

講評

今回の問題の中では，おそらく一番手を動かしやすかった問題だったのではないかと思います。(1)は解答欄の前後の誘導を見抜けば解答が作りやすかったと思います。$a+b+c=3k$（k は整数）ならば，３桁の数は３の倍数になります。各位の数の合計値が３の倍数，これが３の倍数判定法です。(2)と合わせてよく出来ていました。

(3)も，$a+9-4=11k$（k は整数）とし，$a=11k-5$ から，$1 \leqq 11k-5 \leqq 9 \Leftrightarrow \dfrac{6}{11} \leqq k \leqq \dfrac{14}{11}$ より，$k=1$ として，不等式から k の値を絞り込んでいる解答も多く見受けられ感心しました。

(4)(5)は 11 の倍数判定法です。(4)では(3)をヒントとして「各位の数字の加減」で判定できることを見抜いて論証できるかを見ました。当然，(5)でも(4)の延長線上として「各位の数字の加減」を導けているかを採点上重要視しています。なかなか不思議で興味深い構造を持っているでしょう。

このように，整数の性質について研究する数学の一分野を数論（または整数論）といいます。一般的には，方程式などを研究の対象とする「代数学」の一分野として見なされます。他の整数論の話題として次のようなものがあります。

フェルマーの最終定理というのがあるのですが，知っている人はいますか？

３以上の自然数 n について，$x^n + y^n = z^n$ となる自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しない

これは「３以上の自然数」という条件が重要です。$n=2$ のとき，上の式を満たす整数の組は無数に

存在し，具体的に書き表わすことができるからです。$n=2$ のとき，$x^2+y^2=z^2$ を満たす自然数 $(x,\ y,\ z)$ のことをピタゴラス数といいます。$m>n$ である自然数 m，n に対し，$x=m^2-n^2$，$y=2mn$，$z=m^2+n^2$ とおくと無数のピタゴラス数ができます。

ワイルズ

フェルマーが，驚くべき証明を得た，と書き残したと伝えられ，、長らくその証明も反例も知られなかったことからフェルマー予想とも称され，360 年後にワイルズによって完全な証明が発見されました。これを解決できた背景に，谷山＝志村予想，岩澤理論と呼ばれる日本の数学者が築いた英知が大々的に貢献していたことも見逃せません。

ワイルズは 8 年間もの証明との戦いの末，1994 年 9 月 19 日月曜日の朝，ついにこの証明に終止符を打つことに成功。 論文は 200 ページを超えていたといわれています。

さて，話は変わりますが，次の式は何を意味すると思いますか。

$6=3+3$，$8=3+5$，$10=3+7=5+5$，$12=5+7$，$14=11+3=7+7$，$16=5+11$，……

これは「ゴールドバッハの予想」と呼ばれている問題です。具体的には以下の予想です。

6 以上の任意の偶数は，二つの奇数の素数の和で表すことができる

これはまだ「予想」であり，すべての偶数に対して成立するか解決していません。2007 年 2 月現在，5×10^{17} までの偶数について成り立つことがコンピュータによって確かめられています。

あと，素数の話題としては，(3，5)，(11，13)，(857，859) などの，差が 2 である二つの素数の組を見つけることを億滴とする「双子素数の予想」というのもあり，こちらも未解決です。今から約 2400 年前，ギリシャの数学者であるユークリッドは「素数は無限に存在する」ことを証明しましたが，4000 年以上経た現在でも，素数に関する未解決問題は存在しているわけです。

数論の難解さは，この「素数の分布状況の複雑さ」にあるといわれています。

今回の問題は直接この素数には関連していませんが，これを機会に「整数の構造」というものに興味を持ってくれたら大変嬉しく思います。

数学は計算して終わりというものではありません。数学とは人間に密着した「文化」であり，その歴史を学ぶことに大きな意義があります。

私たちが普段の生活で用いている 10 進法は「手の指の本数に関係する」といわれています。もし指の本数が 8 本だったらどんな世界が生まれていたでしょうか。

（北海道浜頓別高等学校　吉田　亮介）