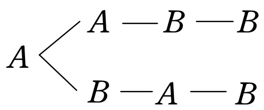
第３問　１人千円の入場料をとる施設があり，そこに千円札しかもっていない n 人の人と，二千円札しかもっていない n 人の人を入場させたい。施設は受付開始時に釣り銭を用意していないとする。釣り銭が不足しないような受付順を考えたい。

ただし，人の区別はしないものとする。また，入場料は個々に支払うものとする。

例えば，$n=2$ の場合，千円札しかもっていない人を A，二千円札しかもっていない人を B として，その受付順を樹形図で表すと，

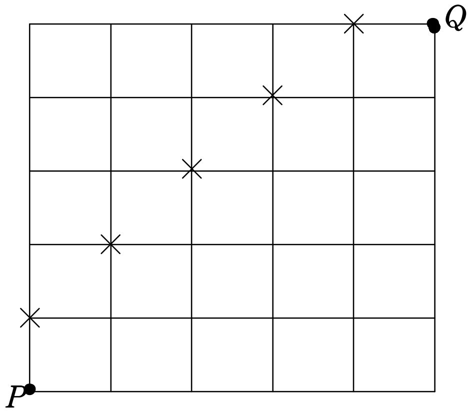


となるので，２通りとなる。

(1)　$n=3$ のとき，受付順は全部で何通りあるか。

(2)　$n=4$ のとき，受付順は全部で何通りあるか。

(3)　図のような道路で，点 P から点 Q まで最短距離で行く経路のうち，少なくとも１回は×印の箇所を通る経路は何通りあるか。



(4)　$n=6$ のとき，受付順は全部で何通りあるか。

(5)　それぞれの人数を n 人として，受付順は全部で何通りあるかを表す式を n を用いて表せ。

$\boxed{\text{着眼点}}$

この問題は，カタラン数（Catalan number）と呼ばれる数の問題です。

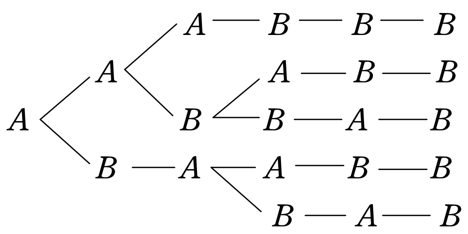
カタラン数は自然数で，ベルギーの数学者 Eugene Charles Catalan によって名付けられた数です。１番目のカタラン数から順に列記すると，1，2，5，14，42，132，429，1430，4862，16796，58786，208012，742900，2674440，9694845，35357670，129644790，…… となります。

この問題を解くポイントは， 千円札しか持っていない人を，常に二千円札しか持っていない人よりも先行して受け付ける順，つまり，(3)の最短経路において，横軸を千円札しか持っていない人の数，縦軸を二千円札しか持っていない人の数としたときに，×を通らない道順は何通りあるのか，という問題と一致するということです。

$\boxed{\text{解答}}$

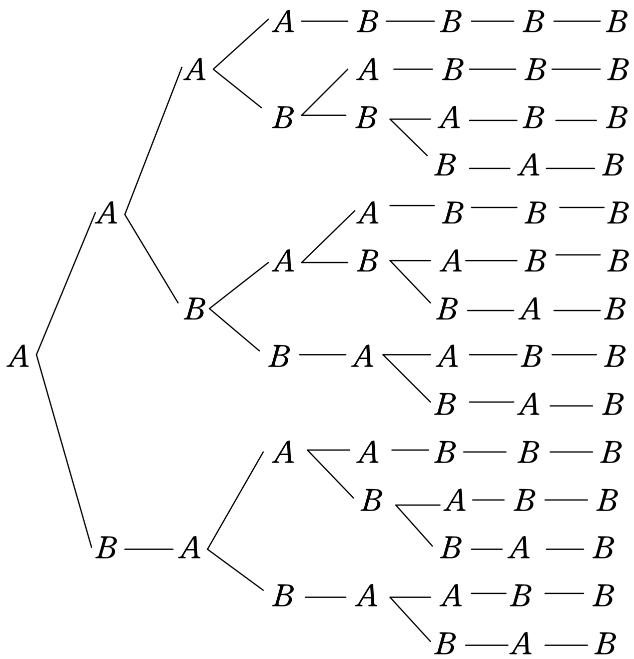
千円札しかもっていない人を A，二千円札しかもっていない人を B とし，その受付順を樹形図で表すと，

(1)



5 通り

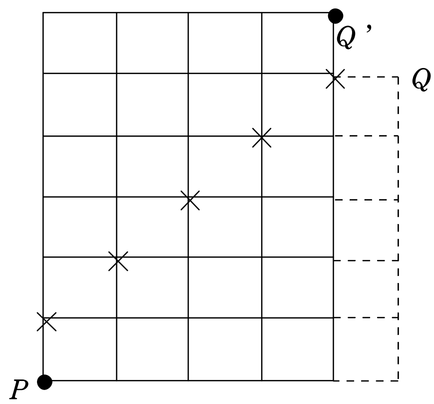
(2)



14通り

(3)　少なくとも1回は×印の箇所を通る経路とは，経路図を×印を結ぶ直線で折り返した右の図において，点Pから点Q'まで最短距離で行く経路の数と等しい。

　したがって，${}_{10}C_4=210$ (通り)



(4)　(3)における考え方を用いると，(全ての経路数) −(× 印を通る経路数) となるので，(6×6の経路数)−(5×7の経路数) より，　${}_{12}C_6-{}_{12}C_5=924-792=132$ (通り)

(5)　${}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}=\dfrac{(2n)!}{n\,!\,n\,!}-\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n\,!}$　$\left[\dfrac{1}{n+1}{}_{2n}C_n\right]$

$\boxed{\text{配点}}$　(1)(2)(3)(4)(5)　各8点

$\boxed{\text{講評}}$

　受験者314名の平均点は40点満点で，18.6点でした。満点が13名，30点以上が59名と出題者の予想より良い結果となりました。

　(1)，(2)は常にAが先行する樹形図を書けば良いのですが，中には苦労していた人もいました。特に，(2)の正答者が思っていた以上に少なかったのは残念です。場合の数においては，数え上げる力が必要

となります。しっかりと書けるような練習をしましょう。

(3)はこの問題を完答するために出題した問題です。横軸を千円札しか持っていない人の数，縦軸を二千円札しか持っていない人の数としたときに，×を通らない道順は何通りあるのか，それが(1)，(2)の答えになっていることを理解してほしかったのです。この問を式で表すことができれば(5)の答えになるからです。残念ながら解答例のように組合せの式で表現した人はわずかでした。正答者で最も多かったのは，パスカルの三角形を利用して×を通らないように求めた解答でした。最短経路を求める問題を普段の授業でしっかりとやっているなという感想を持ちました。出題者としてもこの解答法が多いと思っていたので，あえて×を通る経路数を出題しました。意外にも全ての経路数の計算が間違っている人が多かったのは残念です。また，場合分けをして解答した人も多数いました。かなり細かく考えなければならないところをしっかり計算していました。ただし，42 通りを 41 通りとした答えも多く見受けられました。(4)も同様でした。

(5)を正答した人は少なかったのですが，(1)～(4)の解答から推定という正答がほとんどでした。(3)の解答もしくはその図を使って説明がされていれば良かったのですが。中にはカタラン数のことを知っていると思われる解答も複数ありました。そのなかの 1 人は答案にカタラン数と記入していました。よく勉強していますね。

（北海道札幌啓成高等学校　中居　基昭）