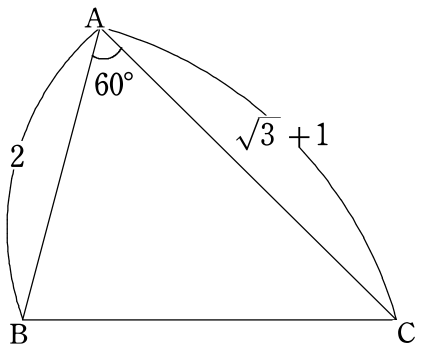
第２問　三角形ABC において，AB＝2，AC＝$\sqrt{3}+1$，$\angle A=60°$ であるとき，次の問いに答えよ。



(1)　辺BC の長さ，および∠C の大きさを求めよ。

(2)　△ABC の面積 S を求めよ。

(3)　△ABC について，点A から辺BC に下ろした垂線をAD とするとき，AD の長さを求めよ。

これ以降の計算の際に，教科書によっては説明されていない事項が出てくる場合があるので補足説明する。

> (4)，(5)の計算の際に，$\sqrt{2+3\sqrt{5}}$ などのように根号の中に根号を含むような形で数値が表される場合がある。このような形を二重根号という。
>
> 例）$a>0$ で $a^2=2+3\sqrt{5}$ のとき，$a=\sqrt{2+3\sqrt{5}}$
>
> 二重根号については簡単な形に変形できる場合がある。
>
> $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$　　$(a>0,\ b>0)$
>
> $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$　　$(a>b>0)$
>
> 例）$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2+2\sqrt{3\cdot 2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$
>
> ただし，どんな場合でも変形できるわけではない。（直せない場合もある）

(4)　辺AB，AC の中点をそれぞれM，N とする。点L が辺BC 上を動くとき，ML＋LN の最小値を求めよ。

(5)　２辺AB，AC 上にそれぞれ点E，F をとる。このとき，DE＋EF＋FD の最小値およびそのときのAE，AF の値を求めよ。

$\boxed{\text{着眼点}}$

図形問題です。(1)(2)などは正弦定理，余弦定理などを思い浮かべる人が多いと思いますが、三平方の定理を使えば中学の内容でも解くことができます。

(3)……(2)を使うのが定石です。

(4)……距離の和の最小値問題です。対称点を使うことに気がつくかどうか。

(5)……(4)と同じ発想ですが，２つの対称性を上手に扱えるかがポイントです。

この問題では，和 DE＋EF＋FD の最小値を求めていますが，一般に点D を辺BC 上の任意の点としたのを「Fagnano（ファニャーノ　イタリアの数学者1682－1766？）」の問題というようです。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)　余弦定理 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$ より

$$BC^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 60°$$
$$=4+1+2\sqrt{3}+3-4(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}$$
$$=8+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}=6$$

よって，$BC>0$ より　　$BC=\sqrt{6}$

正弦定理 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$ より

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sin C}$$

$$\sin C=2\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$A=60^\circ$ より，$C<120^\circ$ であるから　　$C=45^\circ$

(2)　面積の公式 $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$ より

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)\sin 60^\circ=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

(1)(2)の別解

△ABC において，点B から辺AC に引いた垂線をAH とすると，△ABH は 90°，60°，30° の直角三角形より

$$\mathrm{AH}=1,\ \mathrm{BH}=\sqrt{3},$$

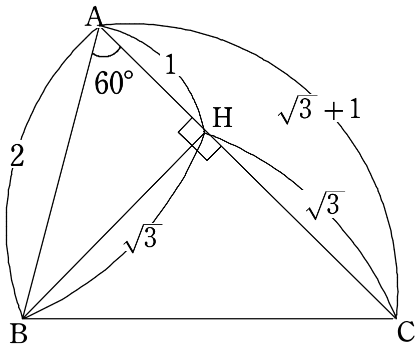
$$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}-\mathrm{AH}=(\sqrt{3}+1)-1=\sqrt{3}$$

よって，△BCH は ∠BHC$=90^\circ$ の二等辺三角形である。

三平方の定理 $\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2=\mathrm{BC}^2$ より

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6},\ \angle\mathrm{C}=45^\circ$$

ゆえに，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BH}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$



(3)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{AD}$　と　(2)の結果から

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{AD}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\quad\text{より}\quad \mathrm{AD}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

(4)　△ABC において，直線BC に関して点A と対称な点をA′ とすると，２つの三角形△ABC と △A′BC は直線BC に関して対称である。また，直線BC に関して点N と対称な点をN′ とすると，

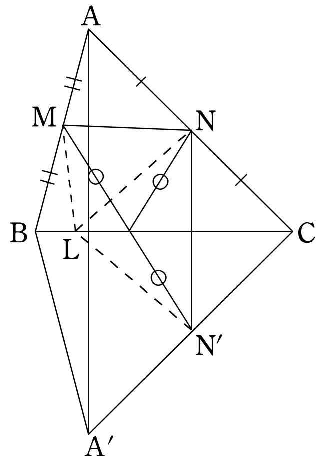
$$\mathrm{LN}=\mathrm{LN'}\quad\text{より}\qquad \mathrm{ML}+\mathrm{LN}=\mathrm{ML}+\mathrm{LN'}$$

よって，距離の和が最小になるのは点L が直線MN′ 上にあるときを考えればよい。ここで，△ABC において中点連結定理より

$$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad\text{かつ}\quad \mathrm{MN}/\!/\mathrm{BC}$$

△AA′C において中点連結定理より

$$\mathrm{NN'}=\frac{1}{2}\mathrm{AA'}=\frac{1}{2}\cdot 2AD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\quad\text{かつ}\quad \mathrm{NN'}/\!/\mathrm{AA'}$$



よって，BC⊥AA′ であることから，MN⊥NN′

ゆえに，△MN′N は直角三角形となり，三平方の定理から

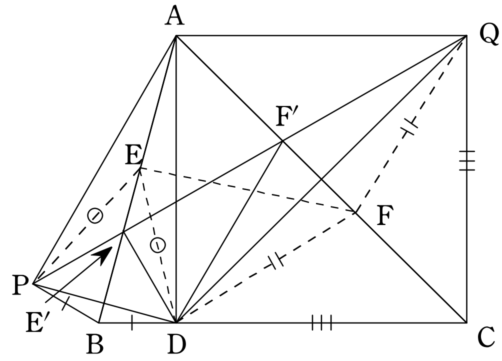
$$\mathrm{MN'}^2=\mathrm{MN}^2+\mathrm{NN'}^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{14+4\sqrt{3}}{4}$$

したがって，

$$\mathrm{MN'}=\sqrt{\frac{14+4\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{14+4\sqrt{3}}}{2}$$

以上のことから，ML＋LN の最小値は $\dfrac{\sqrt{14+4\sqrt{3}}}{2}$

(5)　直線AB，AC に関して点D と対称な点をそれぞれP，Q とする。このとき，DE＝PE，DF＝QF より，DE＋EF＋FD＝PE＋EF＋FQ≧PQ なので，E，F が直線PQ 上にあるとき，DE＋EF＋FD は最小になり，最小値は PQ である。



$\angle PAB=\angle DAB=15°$，$\angle BAC=60°$，

$\angle QAC=\angle DAC=45°$

であるから，$\angle PAQ=120°$　……①

また，対称性より，

$AP=AD=AQ$　……②

なので，△APQ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}PQ^2&=AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cos\angle PAQ\\&=AD^2+AD^2-2AD\cdot AD\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=3AD^2\end{aligned}$$

よって，$PQ=\sqrt{3}\,AD=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

線分PQ と辺AB，AC との交点をそれぞれE′，F′ とすると，E′，F′ が和DE＋EF＋FD を最小にする点E，F である。

①②より，△APQ は $\angle PAQ=120°$ の二等辺三角形なので，$\angle APQ=\angle AQP=30°$

△APE′ において，$\angle APE'=30°$，$\angle PAE'=15°$ であるから，$\angle AE'P=135°$ となるので，正弦定理を用いると

$$\frac{AE'}{\sin 30°}=\frac{AP}{\sin 135°}\quad \text{より}\quad AE'=\frac{AP}{\sin 135°}\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

△APF′ において，$\angle APF'=30°$，$\angle PAF'=15°+15°+45°=75°$ なので

$\angle AF'P=180°-(30°+75°)=75°$　より，△APF′ は $PA=PF'$ の二等辺三角形である。

よって，$PA=PF'=AD$ となるので，余弦定理より

$$\begin{aligned}AF'^2&=PA^2+PF'^2-2PA\cdot PF'\cos 30°\\&=AD^2+AD^2-2AD\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=(2-\sqrt{3})AD^2\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}AF'&=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,AD=\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}=1\end{aligned}$$

以上のことから，DE＋EF＋FD の最小値は $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ で，そのとき，$AE=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$AF=1$

$\boxed{\text{配点}}$　(1)10点　(2)(3)各 5 点　(4)(5)各10点

$\boxed{\text{講評}}$

(1)(2)は基本問題，(3)も(2)をヒントと考えれば普通の問題，(4)からが少し難しくなります。(5)は確かに難問で，(4)をヒントと考えればなんとかなりそうだと思ったのですが，さすがに最後まで解けた人

は非常に少なかったです。

出題した後で知ったのですが，この問題(5)の原型の形「Fagnanoの問題」は昨年７月にあるテレビ番組でも扱われていたそうです。受けた人で見た人はいますか？　深夜の番組（「たけしのコマネチ大学」という番組らしいです）なのでよい子は見てないかな？

実は，この問題は，もともとは(1)(2)(3)と(5)を昨年のコンテスト問題の案として岩見沢東高校の大和先生が考えられたものでした（テレビ番組放送の前です）。昨年は出題されなかったものですが，今年，(1)(2)(3)と(5)の難易度にギャップがあるので(4)を加えて出題しました。

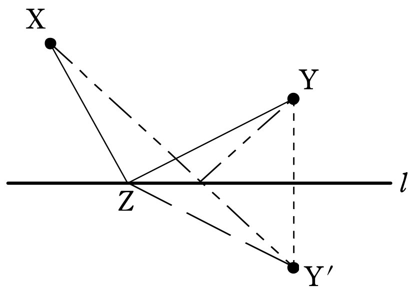
全体的には(1)の出来が非常によく，(2)(3)も多くの人が出来ていました。(1)の辺BC は数Ⅰの範囲では余弦定理で，∠C の大きさは正弦定理または余弦定理で求めるのが一般的ですが，別解にあるように点B から辺AC に垂線を引くことに気がつくと，三平方の定理や 30°，60°，90° の直角三角形および直角二等辺三角形の性質を用いて，辺BC の長さと∠Cの大きさは両方とも三角比を使わずに求めることができます。そのことに気づいた人は計算量を大幅に節約できたと思います。

(2)では三角比の面積の公式で求めるのがごく一般的なやり方ですが，先に(3)の点A から辺BC に引いた垂線BD の長さ（BC を三角形の底辺としたときの高さ）を用いて面積を求めた人もいました。それでもＯＫです。面積自体は(1)の補助線を用いると中学の知識だけでもできます。

(3)では解答例のように面積から求めるのが（(2)を使うので）自然だと思ったのですが，△ADC が直角二等辺三角形である（∠C＝45°）ことを使う方法も平易で，そのやり方を使った人も多かったです。他に，BD＝x とおいて，△ABD と△ACD の高さが一致することから，三平方の定理で求めていた人もいたのですが，けっこう計算に苦労していました。やり方はいろいろあってもいいので，もし他にも別解があれば事務局まで寄せてみてください。

(4)からは２点からの距離の和の最小値を求める問題です。元になっているのは中世のヨーロッパの学生を悩ませた，次のような問題です。調べましたらこれも名前がついていて「ヘロンの問題」というようです。結構有名な問題なので知っている人も多いと思います。

野原にロバがいて現在地X から自分の小屋Y に帰ろうとしている。しかし，のどが渇いたので途中で川によって水を飲んでから，川に対して同じ側にある自分の小屋に帰ることにした。ロバの歩く距離を最も短くするにはどのようなルートを取ればいいか。ただし，川は直線 l 上を流れ，現在地も自分の小屋も川からは離れている。



すなわち，水を飲む場所（直線 l 上）を点Z として，XZ＋ZY の最小値およびそのときの点Z の位置を求めよという問題です。

標準的な解答は解答例に示した通り，直線 l に関して点Y と対称な点Y′ をとると，対称性から XZ＋ZY＝XZ＋ZY′ となり，Z が直線XY′ と直線 lの交点と一致するとき，XZ＋ZY は最小となります。

このように，今回の問題も正解者は対称性を用いて解いていた人が多かったです。(4)では△MNN′が直角三角形であることを用いれば，これも中学までの知識でも解けます。しかし，三平方の定理より $(\mathrm{MN}')^2=\dfrac{14+4\sqrt{3}}{4}$ までは求められるのですが，MN の値は二重根号になり，その二重根号がは

ずせないのです。二重根号をはずせる値にするために設定を変えると(1)～(3)にも影響がでてきます。いろいろ考えた結果，解説として二重根号ははずせる場合もはずせない場合もあるという但し書きをつけて出題しました。(4)ははずせないのですが，(5)ははずせます。ただし，はずしていなくても減点はしていません。実際の答案ではMN′まで求めた人はほとんど二重根号をはずさない形で答えとして書いてくれましたが，一部はずそうとして苦労していた人もいました。

この場合，$\mathrm{MN'}=\dfrac{\sqrt{14+4\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{14+2\sqrt{12}}}{2}$ より，連立方程式 $\begin{cases} a+b=14 \\ ab=12 \end{cases}$ を解くと，２つの数は $7\pm\sqrt{37}$ になるので，$\mathrm{MN'}=\dfrac{\sqrt{7+\sqrt{37}}+\sqrt{7-\sqrt{37}}}{2}$ とできます。これでもいいのですが，これでは二重根号をはずしたことにはなりません。１人だけこのようにした人がいましたが，もちろん正解としました。（受験番号391）

対称性を使わないで解いていた人のうち，比較的多い答は，点M，点Nから直線BCにそれぞれ垂線MI，MJを引き，IJの中間点をPとすればいいというものでした。これは実は一般には正しくないということに気がつくでしょうか。このやり方で解いても正解と一致するのでなぜ減点されたのか疑問を持つ人もいると思いますが，これが正解になるのは直線MNが直線BCと平行な場合だけです。この問題の場合，２辺AB，ACの中点を結ぶのでMNはBCと平行になるからこれでも正解は導き出せますが，平行であることを示さずに，IJの中点において最小とした人は減点しています。ちなみに，BCの中点で最小とした人は誤りですので点数はあげていません。

(5)はまずどのような場合に最小になるかをきちんと述べた人にまず点数を与えました。解答例以外でも，辺ABに関して点Dと対称な点をD′，直線AD′に関して点Cと対称な点をC′などとして線分CC′の最小値と考えても正解になります。

△DEFが正三角形の場合であるとか，点Dから辺AB，ACに垂線を引いて，垂線と辺AB，辺ACとの交点をそれぞれE，Fとした場合などは間違いなので点数は与えていません。（実際，理由まで述べて説明している答案はほとんどありませんでした）ただし，中点連結定理を用いると $\mathrm{EF}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}$ が成り立つので，そこまで出来ていた人には点数を与えています。

(5)で説明まで出来ていた人は受験番号10，30，34，38，392，447，448の７名で，おおむね出来ていたのが受験番号35，230，241，453，471，479の６名でした。残念ながら満点ではありませんが，ほぼ完璧だったのが受験番号111，477，485の３名でした。

（北海道札幌開成高等学校　佐々木　光憲）