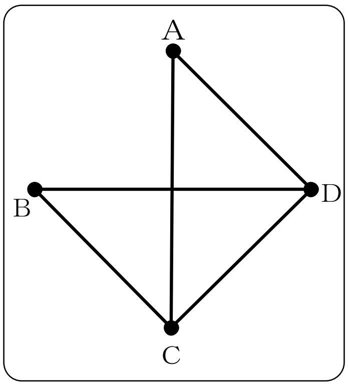
第１問　いま，A，B，C，Dの４人がいるとする。

ＡはＣ，Ｄと握手をした。　　ＢはＣ，Ｄと握手をした。

ＣはＡ，Ｂ，Ｄと握手をした。ＤはＡ，Ｂ，Ｃと握手をした。

このことを右の図のように表し，握手のグラフということにする。



(1)　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆの６人について，次のような握手のグラフを書きなさい。

ＡはＤ，Ｅ，Ｆと握手をした。　ＢはＣ，Ｅ，Ｆと握手をした。

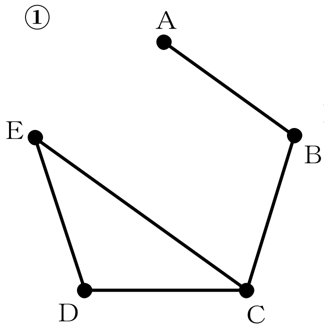
ＣはＢ，Ｄ，Ｅと握手をした。　ＤはＡ，Ｃ，Ｆと握手をした。

ＥはＡ，Ｂ，Ｃと握手をした。　ＦはＡ，Ｂ，Ｄと握手をした。

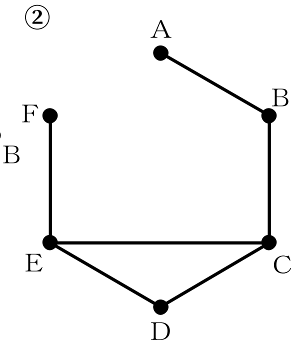
次に，すべての握手の回数 n と各人が握手をした人数の和 s を考えたい。はじめの例をもう一度見てみよう。すべての握手の回数は辺の数であるので $n=5$ である。また，Ａは２人と握手をしている。同様に，Ｂは２人，Cは３人，Ｄは３人と握手をしている。よって，各人が握手をした人数の和は $s=2+2+3+3=10$ である。

(2)　右の①，②の握手のグラフについて，すべての握手の回数 n および各人が握手をした人数の和 s を求めなさい。また，このことから n と s にはどのような関係があると考えられるか答えなさい。

①



②



(3)　15人がそれぞれ３人の人と握手をすることは可能か。可能ならばそのような握手のグラフを書きなさい。不可能ならばその理由をいいなさい。

(4)　Ａ～Ｊの10人で握手をした。握手をした人たちは次のとおり。

ＡはＦ，Ｇ，Ｉと握手をした。　　ＢはＣ，Ｇ，Hと握手をした。

ＣはＢ，Ｄ，Ｆ，Ｊと握手をした。ＤはＣ，Ｅ，Ｈと握手をした。

ＥはＤ，Ｆ，Ｈ，Ｉと握手をした。ＦはＡ，Ｃ，Ｅ，Ｇと握手をした。

ＧはＡ，Ｂ，Ｆ，Ｊと握手をした。ＨはＢ，Ｄ，Ｅ，Ｊと握手をした。

ＩはＡ，Ｅ，Ｊと握手をした。　　ＪはＣ，Ｇ，Ｈ，Ｉと握手をした。

10人は握手をした人としか知り合いになっていない。このとき，以下の条件を満たすようなグループを作りなさい。

①各グループのメンバー構成は１人でも複数でもよい。

②各グループのメンバー構成が複数の場合は，どの２人も知り合いである。

③全グループ数が最小になる。

(5)　ボクは付き合っているユキさんと一緒にパーティーに行った。そこには他にも３組のカップルが参加していた。すなわち，参加したのは４カップル８人である。パーティーに参加した８人で握手を交わした。どの人も同じ人と２度以上握手をした人はいなかった。もちろんどの人も自分のパートナーとは握手をせず，自分自身とは握手をしていない。

握手をしたあと，ボクはユキさんを含めた他の７人に「合計何回握手を交わしましたか」とたずねた。すると，どの人も異なる回数を答えた。さて，ユキさんは何回握手を交わしたか。

着眼点

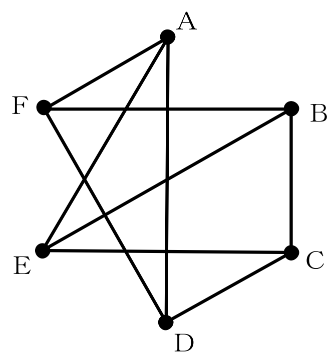
何でも闇雲に考えているだけではなかなか正しい答えには到達できません。今回はグラフを使って整理して考えることを主題に出題しました。

(1)～(4)は実際にグラフというものに慣れてもらうための問題です。

(5)は，グラフだけではなく６回握手をした人と握手をしなかった人，５回握手した人と１回握手した人，４回握手した人と２回握手した人がカップルであることに気がつくかどうかがポイントです。

解答例

(1)　次のとおり。



(2)　①$n=5$，$s=10$　　②$n=6$，$s=12$

これらのことより「各人が握手をした人数の和 s」は「握手の回数 n」の２倍になっている。すなわち，$s=2n$ であると考えられる。

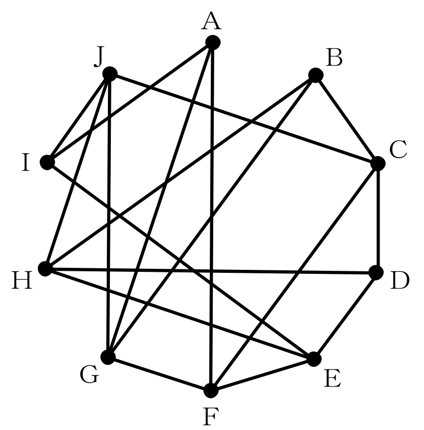
これは，１回の握手において２人でお互い握手をするので各人が握手をした人数の和は握手の回数の２倍になるからである。この事柄は「握手の補題（handshaking lemma）」といわれている。

(3)　不可能である。

このような握手が可能だと仮定する。このとき，各人が握手をした人数の和は $3\times15=45$ 人である。ところが握手の補題よりこれは握手の回数の２倍であるので偶数でなければならない。これは矛盾である。

したがって，このように握手をすることは不可能である。

(4)　握手のグラフを書くと右のようになる。



各人は最高でも４人までとしか結ばれていないので６人以上のグループはできない。また，グラフをよく見れば５人や４人のグループもできない。

Ａ，Ｆ，Ｇの３人を結ぶ辺で三角形ができているので，この３人は同じグループにできる。同様に，Ｄ，Ｅ，Ｈの３人も同じグループにできる。

残ったＢ，Ｃ，Ｉ，Ｊのうち，ＢとＣ，ＩとＪは辺で結ばれているのでこの人たちをグループにできる。

以上により次のようなグループができる。

「Ａ・Ｆ・Ｇ」「Ｄ・Ｅ・Ｈ」「Ｂ・Ｃ」「Ｉ・Ｊ」

(5)　握手のグラフを使って解く。自分のパートナー及び自分自身とは握手をしないので，握手は最大６回である。したがってボクの質問に対する返答は０，１，２，３，４，５，６である。それらの人をそれぞれ　～⑥のように丸数字で表す。

ⅰ）いま，６人と握手をした⑥と誰とも握手をしなかった　を考える。このとき，⑥は⑤，④，③，②，①およびボクと握手をしている。そして⑥と　はカップルである。（⑥は自分のパートナーとは握手していないから）

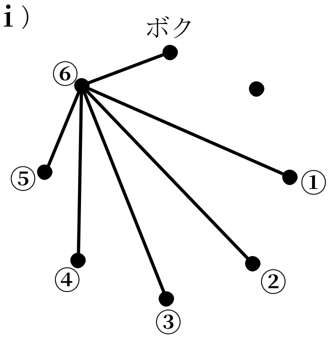
ⅱ）次に，５人と握手をした⑤と１人と握手をした①を考える。このとき，⑤は⑥，④，③，②およびボクと握手をし，①は⑥と握手をしている。そして⑤と①はカップルである。（⑤は自分のパートナーとは握手していないし，　はパートナーではないから）

ⅲ）次に，４人と握手をした④と２人と握手をした②を考える。このとき，④は⑥，⑤，③およびボクと握手をし，②は⑥，⑤と握手をしている。そして④と②はカップルである。（④は自分のパートナーとは握手していないし，①，　はパートナーではないから）

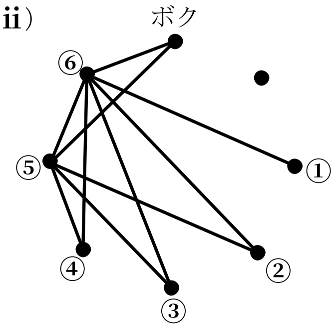
ⅳ）残った③とボクがカップルになる。したがって③がユキさんである。これより，ユキさんは３回握手を交わしている。

答　ユキさんは３回握手を交わした。

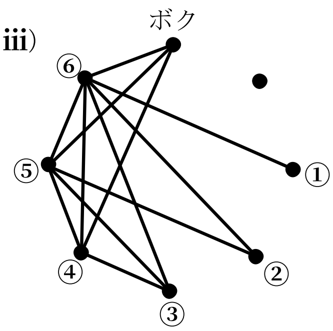
ⅰ）



ⅱ）



ⅲ）



配点　(1)4点　(2)①2点，②2点，関係4点　(3)8点　(4)10点　(5)10点

お詫びと訂正

『解答と解説』p.2 解答例 (2)の2〜3行目

(誤)「すなわち，$\underline{n=2s}$ であると…」　→　(正)「すなわち，$\underline{s=2n}$ であると…」

の間違いでした。大変失礼いたしました。おわびして訂正いたします。

講評

第１問は昨年に引き続き『離散数学』と呼ばれる数学の一分野の中で，特に『グラフ理論』の内容を出題してみました。

問題の意味が分かりやすく，いろいろなアイディアが浮かんできたことと思います。得点はかなり高くなりました。

(1)と(2)についてはほとんどの人ができていました。特に，(2)のいわゆる「握手の補題」の関係式についてはその理由まで説明してくれた答案がいくつか見受けられました。また，中には「$s=2n$ という関係が成り立つかもしれないがわからない」と，それ以外の関係の可能性を示唆した答案がありました。何でも鵜呑みにせずに疑ってかかることは数学の研究をする上では非常に重要です。でも，ちょっと考えすぎたかもしれません。

(3)についてはこの握手の補題を使えばいいと気がついた人にとっては簡単だったようです。中には，実際にグラフをかいて悪戦苦闘している答案も多く見受けられました。

(4)についてはグラフをかいて解く方法以外にも考えられるすべての場合を書き出してみたり，対戦表のような表にして考えたりして正解にたどり着いた答案など，いろいろな考え方があって興味深く採点することができました。

(5)については「３回」と正解しているけれども理由が述べられていない答案が散見されました。申し訳ありませんがこのような答案は０点にさせていただきました。また，握手の補題よりボクの握手の回数は１，３，５回のいずれかであるとして，あとはこの３パターンについて調べ，正解にたどり着いた答案，パートナー同士の握手の回数の合計が６になることに気づいて正解にたどり着いた答案など，いろいろな答案がありました。皆さんの発想にただただ感心するばかりでした。

グラフ理論って面白いでしょう？　有名な数学者である東海大学教育開発研究所教授の秋山仁先生はグラフ理論を専攻とされています。皆さんも未来の秋山仁先生を目指してがんばってみてください。期待しています。

【参考文献】

[1]長尾篤志・景山三平・長崎栄三『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』，国立教育政策研究所（2006）

[2]L. C. ラーソン（秋山仁，飯田博和訳）『数学発想ゼミナール１　新装版』，シュプリンガー・フェアラーク東京，2003.

（札幌静修高等学校　杉本　幸司）