

第1問

- (1) 鳩と鳩の巣がある。鳩が鳩の巣に入るとする。次の [] に入ることのできる自然数のうち最大のものを入れよ。
- (ア) 鳩が 4 羽、鳩の巣が 3 個のとき、少なくとも 1 つの鳩の巣には [] 羽以上いる。
- (イ) 鳩が 8 羽、鳩の巣が 3 個のとき、少なくとも 1 つの鳩の巣には [] 羽以上いる。
- (ウ) 鳩が 15 羽、鳩の巣が 4 個のとき、少なくとも 1 つの鳩の巣には [] 羽以上いる。

このように、 n 、 k を自然数とすると、 $nk+r$ ($1 \leq r \leq n-1$) 羽の鳩が n 個の鳩の巣に入るとすれば、少なくとも 1 つの鳩の巣には $k+1$ 羽の鳩が入っている。この事実を「鳩の巣原理」という。この鳩の巣原理の考え方をを使って以下の事実がいえる理由を説明したい。何を鳩、何を鳩の巣と考えたのかを明示して説明せよ。

【例題】 4人でじゃんけんをするとき同じ手を出す人がいる。

【解答】 鳩～じゃんけんをした 4 人

鳩の巣～「グー」「チョキ」「パー」の 3 つの手

理由～鳩の 4 人はその出した手にあたる鳩の巣に入る。このとき、少なくとも

1 つの鳩の巣には 2 人以上入っている。この人たちは同じ手を出している。

- (2) ある町の住民 1000 人を調査したところ、この町の住民の中には同じ誕生日の人が 3 人以上いる日がある。
- (3) 5 以下の正の数（整数でなくともよい）を 6 つ考える。その中のどれか 2 つは必ず差が 1 未満になる。
- (4) 一辺の長さが 70 cm の正方形の形をした射的の的があり、50 発の弾丸が異なる 50 か所に当たった。このとき、ある 2 つの弾丸で、その 2 点間の距離が 15 cm 未満のものがある。
- (5) n 個の自然数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ に対して、その中の何項かをとってきて和を作る。このとき、それらの和の中で n で割り切れるものがある。

第2問

円に内接する四角形 $ABCD$ において、

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成り立つことを、次の手順で証明せよ。

- (1) 線分 BD 上に、 $\angle BAE = \angle CAD$ となるように点 E をとる。

$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ が相似であることを証明せよ。

- (2) (1)から、

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE$$

であることを示せ。

- (3) $\triangle AED$ と $\triangle ABC$ を考えて、

$$BC \cdot DA = AC \cdot ED$$

を示せ。

- (4) 最初の等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

を示せ。

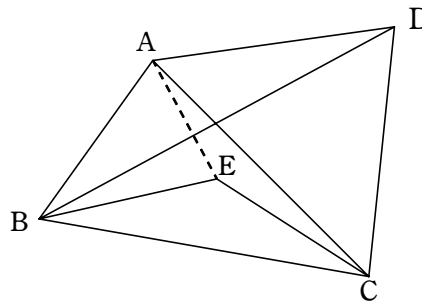
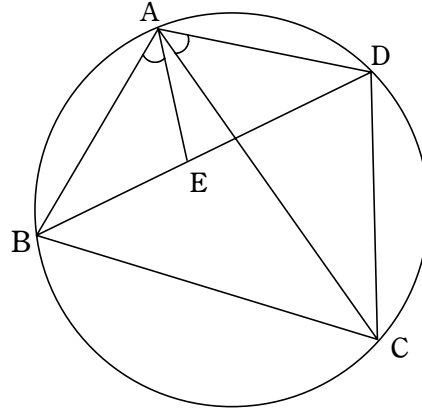
- (5) 逆に、四角形 $ABCD$ において、等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成り立つならば、四角形 $ABCD$ は円に内接することを、

$$\triangle ABD \sim \triangle EBC$$

となるように点 E をとることによって証明せよ。



第3問

実数全体の集合を R とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 - 2x$ とする。 R の部分集合 A に対し、集合 $f(A)$ を

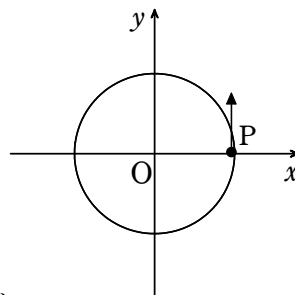
$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

と定める。例えば、 $A = \{0, 1, 2\}$ のとき $f(A) = \{-1, 0\}$ であり、 $A = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$ のとき $f(A) = \{y \mid -1 \leq y < 0\}$ である。次の問いに答えよ。

- (1) $A = \{x \mid 2 < x < 4\}$ のとき、 $f(A) = \{y \mid m < y < M\}$ となった。定数 m, M の値を求めよ。
- (2) $A = \{x \mid a \leq x \leq 3\}$ のとき、 $f(A) = \{y \mid -1 \leq y \leq 3\}$ となるような定数 a の値の範囲を求めよ。
- (3) $A = \{a\}$ とするとき、 $A = f(A)$ が成り立つような a の値をすべて求めよ。
- (4) $A = \{x \mid x \geq a\}$ とするとき、 $A = f(A)$ が成り立つような a の値をすべて求めよ。
- (5) $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ とするとき、 $A = f(A)$ が成り立つような a, b の組をすべて求めよ。ただし、 $a < b$ とする。
- (6) $A = f(A)$ 、 $B = f(B)$ ならば $A \cup B = f(A \cup B)$ は成り立つか。成り立つのなら証明し、成り立たないのなら反例を挙げよ。

第4問

次のようなゲームをする。1個のさいころを投げ、1の目が出れば 10° 、2の目が出れば 20° 、3の目が出れば 30° 、4の目が出れば 40° 、5の目が出れば 50° 、6の目が出れば 60° 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。今、点Pは図の位置から出発する。次の問いに答えよ。



- (1) ちょうど1周するのに、さいころを投げる回数が最も少ないのはどのような場合か。
- (2) (1)の回数でさいころを投げたとき、点Pが到達できる位置をすべて答えよ。

- (3) A, B, C, Dの4人がゲームの仕方を次のようにアレンジした。

A～1個のさいころを最大7回投げ、偶数の目が出た場合のみ、2の目が出れば 20° 、4の目が出れば 40° 、6の目が出れば 60° 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。奇数の目が出た場合は回数は数えるが、点Pはその場にとどまる。ただし、点Pがちょうど1周したら、さいころを投げるのをやめるものとする。

B～大小のさいころを2個投げ、目の和が偶数の場合のみ、(目の和) $\times 10^\circ$ 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。これを最大4回繰り返す。目の和が奇数の場合は回数には数えるが、点Pはその場にとどまる。ただし、点Pがちょうど1周したら、さいころを投げるのをやめるものとする。

C～1個のさいころを8回投げ、素数の目の場合のみ、(目の数) $\times 10^\circ$ 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。素数以外の目が出た場合は、回数は数えるが、点Pはその場にとどまる。

D～さいころではなく、硬貨を8回投げて、表が出たら 30° 、裏が出たら 60° 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。

それぞれがちょうど1周するのは何通りあるか。また、その確率を求めよ。

- (4) Cの提案した方法でゲームをすることとする。

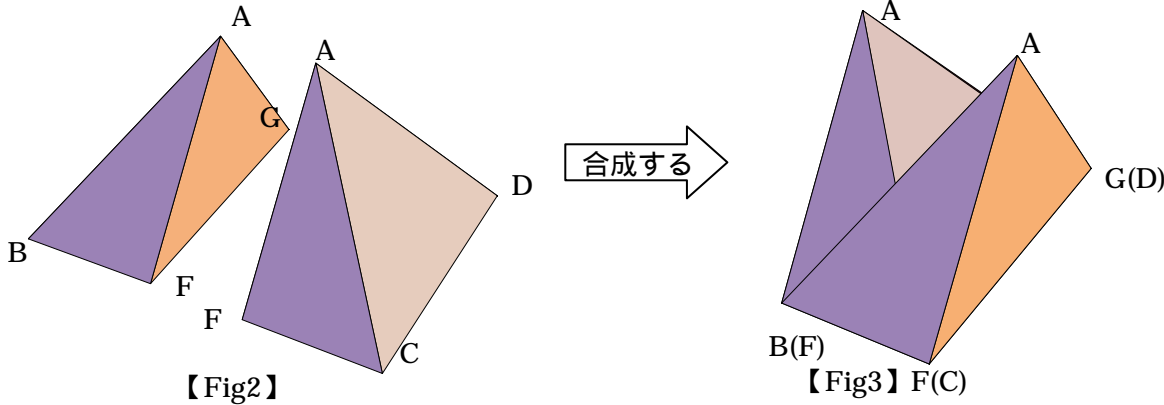
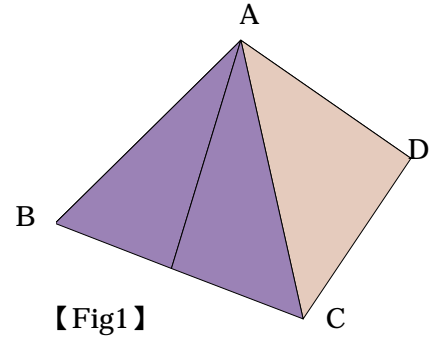
(i) さいころを1回投げたときの回転する角度の期待値を求めよ。

(ii) 1個のさいころを8回投げ、素数の目の場合のみ、(目の数) $\times 10^\circ$ 、点Pを図の原点Oを中心に円周上を反時計周りに回転させる。素数以外の目が出た場合は、回数は数えるが、点Pはその場にとどまる。ちょうど1周した者のうち、初めに5の目が出た者には500円、3が出た者には300円、2が出た者には200円の賞金が与えられるものとする。賞金の期待値はどのようになるか。

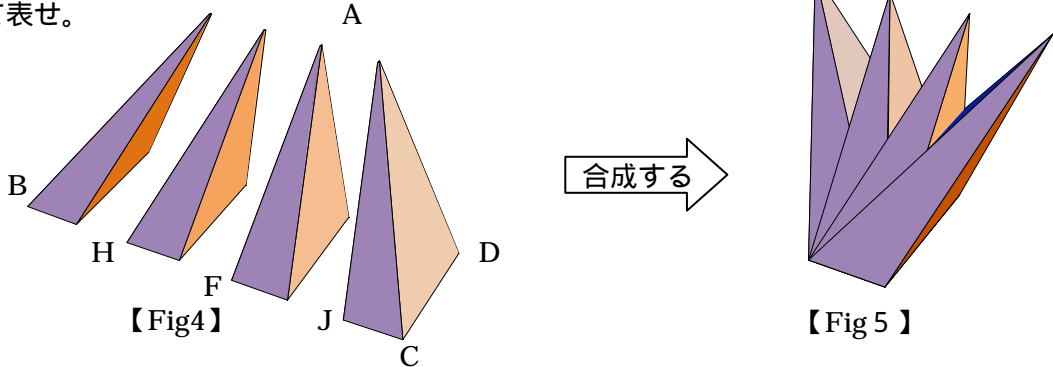
問題5

底面が1辺 a の正方形で、4つの側面が1辺 a の正三角形である右図のピラミッドA-BCDE (Fig1) について次の問いに答えよ。

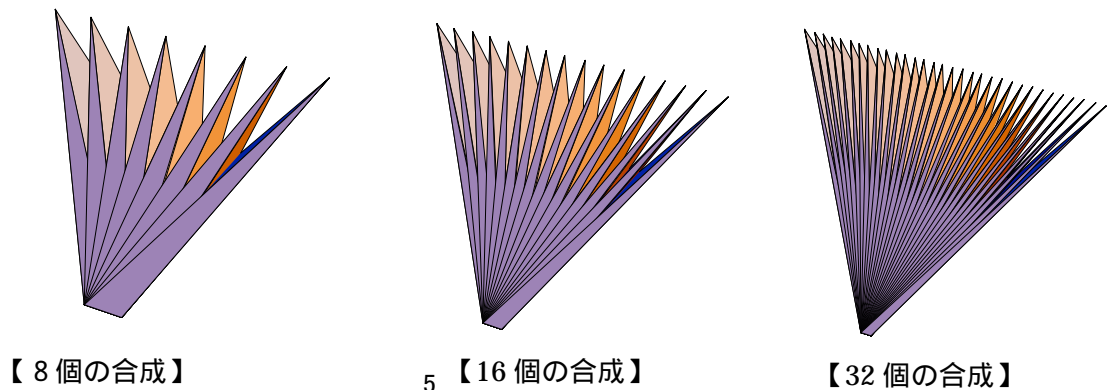
- (1) ピラミッドA-BCDEの高さ h を a を用いて表せ。
- (2) ピラミッドA-BCDEの体積 V_0 を a を用いて表せ。
- (3) ピラミッドA-BCDEの底面上の辺BCの中点をF, 辺DEの中点をGとする。ピラミッドA-BCDEを底面BCDEに垂直な平面AFGで切断し2つの立体(Fig2)を底面が一致するように平行移動し合成した立体(Fig3)の体積 V_1 を a を用いて表せ。



- (4) (3)で2つに切断した立体A-BFGEの底面上の辺BF, GEの中点をH, Iとする。立体A-BFGEを平面AHIで切断する。同様に立体A-FCDGの底面上の辺FC, DGの中点をJ, Kとし、立体A-FCDGを平面AJKで切断する。これら4つの立体(Fig4)を底面が一致するように平行移動し合成した立体(Fig5)の体積 V_2 を a を用いて表せ。



- (5) 更に、このような操作を n 回繰り返し、 2^n 個の切断された立体を底面が一致するように平行移動し、合成した立体の体積 V_n を a を用いて表せ。
- (6) この操作を限りなく繰り返し、合成した立体の体積はどのような値に限りなく接近するか予想せよ。



【注意】下図はピラミッドの展開図です。「はさみ」で切り抜いたり、「セロハンテープ」で接着して活用して下さい。

