第１問

⑴　鳩と鳩の巣がある。鳩が鳩の巣に入るとする。次の［　］に入ることのできる自然数のうち最大のものを入れよ。

㈎　鳩が 4 羽，鳩の巣が 3 個のとき，少なくとも１つの鳩の巣には［　］羽以上いる。

㈏　鳩が 8 羽，鳩の巣が 3 個のとき，少なくとも１つの鳩の巣には［　］羽以上いる。

㈐　鳩が 15 羽，鳩の巣が 4 個のとき，少なくとも１つの鳩の巣には［　］羽以上いる。

このように，n，k を自然数とするとき，$nk+r$（$1\leqq r\leqq n-1$）羽の鳩が n 個の鳩の巣に入るとすれば，少なくとも１つの鳩の巣には $k+1$ 羽の鳩が入っている。この事実を「鳩の巣原理」という。この鳩の巣原理の考え方を使って以下の事実がいえる理由を説明したい。何を鳩，何を鳩の巣と考えたのかを明示して説明せよ。

【例題】4 人でじゃんけんをするとき同じ手を出す人がいる。

【解答】鳩～じゃんけんをした 4 人

鳩の巣～「グー」「チョキ」「パー」の 3 つの手

理由～鳩の 4 人はその出した手にあたる鳩の巣に入る。このとき，少なくとも１つの鳩の巣には 2 人以上入っている。この人たちは同じ手を出している。

⑵　ある町の住民 1000 人を調査したところ，この町の住民の中には同じ誕生日の人が 3 人以上いる日がある。

⑶　5 以下の正の数（整数でなくともよい）を 6 つ考える。その中のどれか 2 つは必ず差が 1 未満になる。

⑷　一辺の長さが 70 cmの正方形の形をした射的の的があり，50 発の弾丸が異なる 50 か所に当たった。このとき，ある 2 つの弾丸で，その 2 点間の距離が 15 cm未満のものがある。

⑸　n 個の自然数 a_1，a_2，a_3，……，a_n に対して，その中の何項かをとってきて和を作る。このとき，それらの和の中で n で割り切れるものがある。

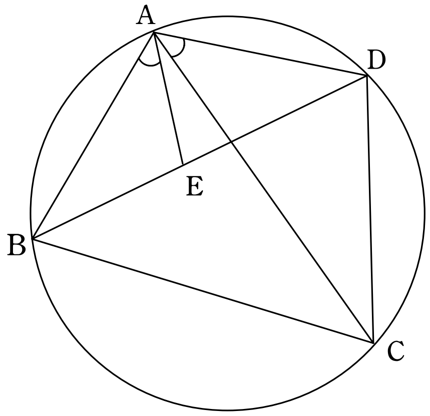
第２問

円に内接する四角形ABCDにおいて，

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成り立つことを，次の手順で証明せよ。

(1)　線分BD上に，$\angle BAE = \angle CAD$ となるように点Eをとる。
　△ABEと△ACDが相似であることを証明せよ。



(2)　(1)から，

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE$$

　であることを示せ。

(3)　△AEDと△ABCを考えて，

$$BC \cdot DA = AC \cdot ED$$

　を示せ。

(4)　最初の等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

　を示せ。

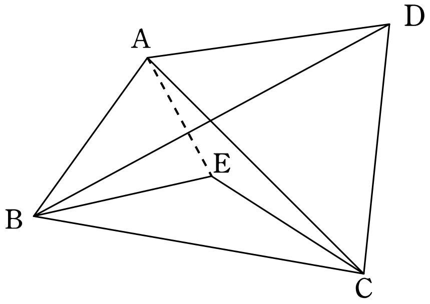
(5)　逆に，四角形ABCDにおいて，等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

　が成り立つならば，四角形ABCDは円に内接することを，

$$\triangle ABD \backsim \triangle EBC$$

　となるように点Eをとることによって証明せよ。



第３問

実数全体の集合を R とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2-2x$ とする。R の部分集合 A に対し，集合 $f(A)$ を

$$f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$$

と定める。例えば，$A=\{0,\ 1,\ 2\}$ のとき $f(A)=\{-1,\ 0\}$ であり，$A=\{x \mid 1\leqq x<2\}$ のとき $f(A)=\{y \mid -1\leqq y<0\}$ である。次の問いに答えよ。

(1) $A=\{x \mid 2<x<4\}$ のとき，$f(A)=\{y \mid m<y<M\}$ となった。定数 m，M の値を求めよ。

(2) $A=\{x \mid a\leqq x\leqq 3\}$ のとき，$f(A)=\{y \mid -1\leqq y\leqq 3\}$ となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

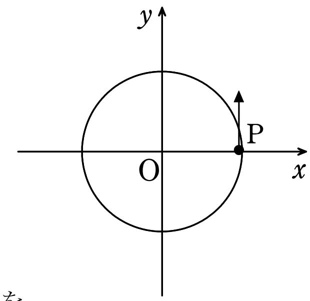
(3) $A=\{a\}$ とするとき，$A=f(A)$ が成り立つような a の値をすべて求めよ。

(4) $A=\{x \mid x\geqq a\}$ とするとき，$A=f(A)$ が成り立つような a の値をすべて求めよ。

(5) $A=\{x \mid a\leqq x\leqq b\}$ とするとき，$A=f(A)$ が成り立つような a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(6) $A=f(A)$，$B=f(B)$ ならば $A\cup B=f(A\cup B)$ は成り立つか。成り立つのなら証明し，成り立たないのなら反例を挙げよ。

第４問



次のようなゲームをする。１個のさいころを投げ，１の目が出れば $10°$，２の目が出れば $20°$，３の目が出れば $30°$，４の目が出れば $40°$，５の目が出れば $50°$，６の目が出れば $60°$，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。今，点P は図の位置から出発する。次の問いに答えよ。

⑴　ちょうど１周するのに，さいころを投げる回数が最も少ないのはどのような場合か。

⑵　⑴の回数でさいころを投げたとき，点P が到達できる位置をすべて答えよ。

⑶　A，B，C，Dの４人がゲームの仕方を次のようにアレンジした。

A～１個のさいころを最大７回投げ，偶数の目が出た場合のみ，２の目が出れば $20°$，４の目が出れば $40°$，６の目が出れば $60°$，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。奇数の目が出た場合は回数は数えるが，点P はその場にとどまる。ただし，点P がちょうど１周したら，さいころを投げるのをやめるものとする。

B～大小のさいころを２個投げ，目の和が偶数の場合のみ，(目の和)$\times 10°$，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。これを最大４回繰り返す。目の和が奇数の場合は回数には数えるが，点P はその場にとどまる。ただし，点P がちょうど１周したら，さいころを投げるのをやめるものとする。

C～１個のさいころを８回投げ，素数の目の場合のみ，(目の数)$\times 10°$，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。素数以外の目が出た場合は，回数は数えるが，点P はその場にとどまる。

D～さいころではなく，硬貨を８回投げて，表が出たら $30°$，裏が出たら $60°$，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。

それぞれがちょうど１周するのは何通りあるか。また，その確率を求めよ。

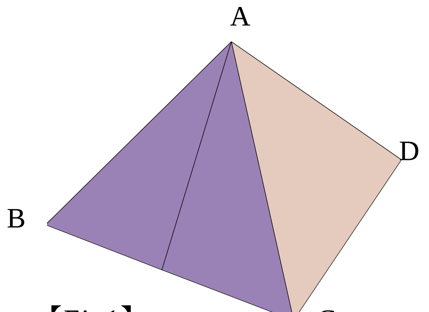
⑷　Cの提案した方法でゲームをすることとする。

（ⅰ）さいころを１回投げたときの回転する角度の期待値を求めよ。

（ⅱ）１個のさいころを８回投げ，素数の目の場合のみ，(目の数)$\times 10°$，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。素数以外の目が出た場合は，回数は数えるが，点P はその場にとどまる。ちょうど１周した者のうち，初めに５の目が出た者には500円，３が出た者には300円，２が出た者には200円の賞金が与えられるものとする。賞金の期待値はどのようになるか。

問題５

底面が１辺aの正方形で、４つの側面が１辺aの正三角形である右図のピラミッド A-BCDE（Fig1）について次の問いに答えよ。

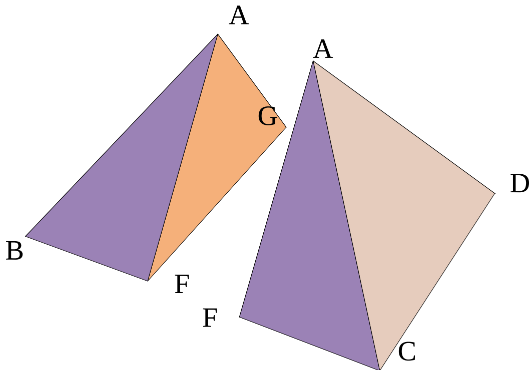


【Fig1】

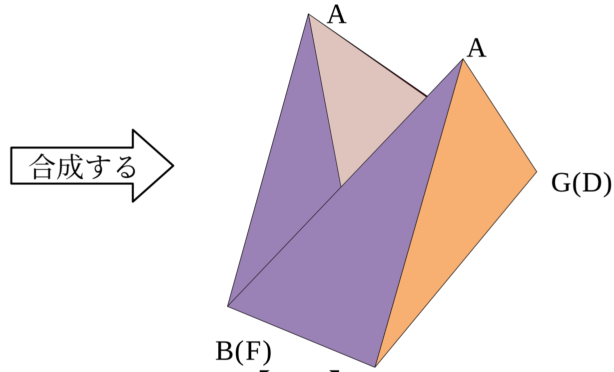
（１）ピラミッド A-BCDE の高さhをaを用いて表せ。

（２）ピラミッド A-BCDE の体積V_0をaを用いて表せ。

（３）ピラミッド A-BCDE の底面上の辺 BC の中点を F，辺 DE の中点を G とする。ピラミッド A-BCDE を底面 BCDE に垂直な平面 AFG で切断し２つの立体（Fig２）を底面が一致するように平行移動し合成した立体（Fig3）の体積V_1をaを用いて表せ。

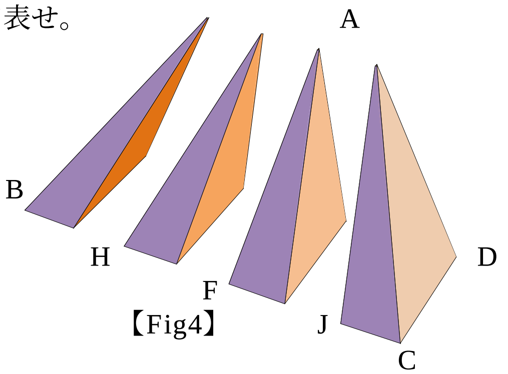


【Fig2】

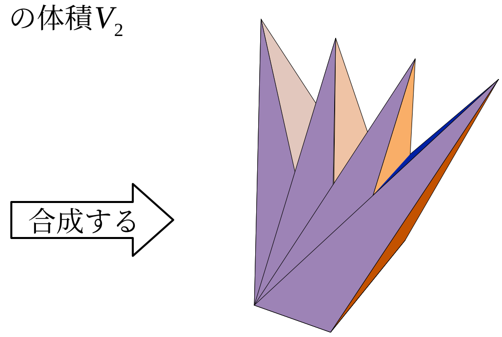


【Fig3】

（４）（３）で２つに切断した立体 A-BFGE の底面上の辺 BF，GE の中点を H，I とする。立体 A-BFGE を平面 AHI で切断する。
同様に立体 A-FCDG の底面上の辺 FC，DG の中点を J，K とし、立体 A-FCDG を平面 AJK で切断する。これら４つの立体（Fig4）を底面が一致するように平行移動し合成した立体（Fig5）の体積V_2をaを用いて表せ。



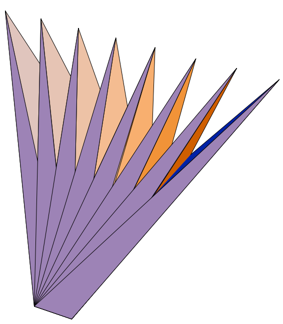
【Fig4】



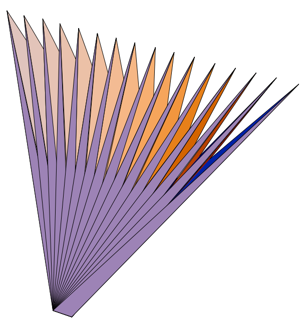
【Fig５】

（５）更に、この様な操作をn回繰り返し、2^n個の切断された立体を底面が一致するように平行移動し、合成した立体の体積V_nをaを用いて表せ。

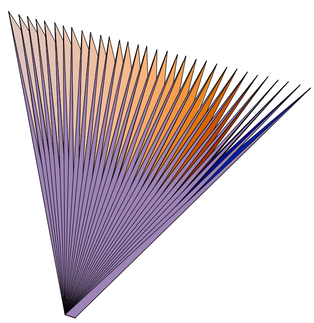
（６）この操作を限りなく繰り返し、合成した立体の体積はどのような値に限りなく接近するか予想せよ。



【８個の合成】



【16 個の合成】



【32 個の合成】

【注意】下図はピラミッドの展開図です。「はさみ」で切り抜いたり、「セロハンテープ」で接着して活用して下さい。