第 1 問

⑴　鳩と鳩の巣がある。鳩が鳩の巣に入るとする。次の［　］に入ることのできる自然数のうち最大のものを入れよ。

㈠　鳩が 4 羽，鳩の巣が 3 個のとき，少なくとも 1 つの鳩の巣には［　］羽以上いる。

㈡　鳩が 8 羽，鳩の巣が 3 個のとき，少なくとも 1 つの鳩の巣には［　］羽以上いる。

㈢　鳩が 15 羽，鳩の巣が 4 個のとき，少なくとも 1 つの鳩の巣には［　］羽以上いる。

このように，n，k を自然数とするとき，$nk+r$（$1 \leqq r \leqq n-1$）羽の鳩が n 個の鳩の巣に入るとすれば，少なくとも 1 つの鳩の巣には $k+1$ 羽の鳩が入っている。この事実を「鳩の巣原理」という。この鳩の巣原理の考え方を使って以下の事実がいえる理由を説明したい。何を鳩，何を鳩の巣と考えたのかを明示して説明せよ。

【例題】4 人でじゃんけんをするとき同じ手を出す人がいる。

【解答】鳩～じゃんけんをした 4 人
鳩の巣～「グー」「チョキ」「パー」の 3 つの手
理由～鳩の 4 人はその出した手にあたる鳩の巣に入る。このとき，少なくとも 1 つの鳩の巣には 2 人以上入っている。この人たちは同じ手を出している。

⑵　ある町の住民 1000 人を調査したところ，この町の住民の中には同じ誕生日の人が 3 人以上いる日がある。

⑶　5 以下の正の数（整数でなくともよい）を 6 つ考える。その中のどれか 2 つは必ず差が 1 未満になる。

⑷　一辺の長さが 70 cmの正方形の形をした射的の的があり，50 発の弾丸が異なる 50 か所に当たった。このとき，ある 2 つの弾丸で，その 2 点間の距離が 15 cm未満のものがある。

⑸　n 個の自然数 a_1，a_2，a_3，……，a_n に対して，その中の何項かをとってきて和を作る。このとき，それらの和の中で n で割り切れるものがある。

$\boxed{\text{着眼点}}$

「鳩の巣原理」は当たり前のことを言っているのですが数学の問題では意外と強力な武器になっていると思いませんか？何を鳩，何を鳩の巣とすればよいのかに気がつけばしめたものです。

$\boxed{\text{解答例}}$

⑴　㈠　2　　㈡　3　　㈢　4

⑵　鳩～ある町の 1000 人住民
鳩の巣～（うるう年も考えて）1 月 1 日から 12 月 31 日までの 366 日
理由～鳩の住民は自分の誕生日にあたる鳩の巣に入る。このとき，少なくとも 1 つの

鳩の巣には 3 人以上が入っている。この人たちの誕生日は同じである。

(3) 鳩～考えた 6 つの数

鳩の巣～ 5 つの集合 $A_n=\{x \mid n-1<x\leqq n\}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$）

理由～考えた 6 つの数がどの集合 の要素になるかを考える。このとき，少なくとも １つの鳩の巣には考えた数の中のどれか 2 つ以上が属する。これら 2 つの差は必ず 1 未満である。

(4) 鳩～ 50 発の弾丸

鳩の巣～的を縦 7 マス，横 7 マスの 49 マス（１辺 10 cmの正方形）に区切ったもの

理由～弾丸があたった場所がどのマスに入っているかを考える（境界の場合はその場所に接する好きなマスに入れる）。このとき，少なくとも１つのマスには 2 つ以上の弾丸が当たっている。これらの弾丸の距離は $10\sqrt{2}$ cm以下であるが，$\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$ であるのでこの距離は 15 cmを越えない。

(5) n 個の自然数 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots,\ b_n$ を

$$b_1=a_1,\ b_2=a_1+a_2,\ b_3=a_1+a_2+a_3,\ \cdots\cdots,\ b_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

で定義する。 この中で n で割り切れるものがある場合はよい。そのようなものがない場合には次のように考える。

鳩～n 個の自然数 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots,\ b_n$

鳩の巣～$n-1$ 個の集合 $A_i=\{x \mid x$ を n で割った余りが $i\}$

$(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,n-1)$

第２問

円に内接する四角形ABCD において，

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成り立つことを，次の手順で証明せよ。

(1)　線分BD 上に，∠BAE＝∠CAD となるように点E をとる。

△ABE と △ACD が相似であることを証明せよ。

(2)　(1)から，

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE$$

であることを示せ。

(3)　△AED と △ABC を考えて，

$$BC \cdot DA = AC \cdot ED$$

を示せ。

(4)　最初の等式

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

を示せ。

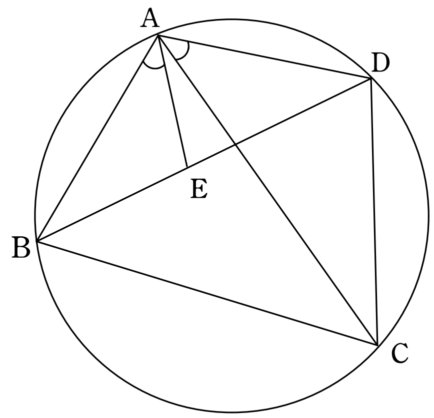
(5)　逆に，四角形ABCD において，等式

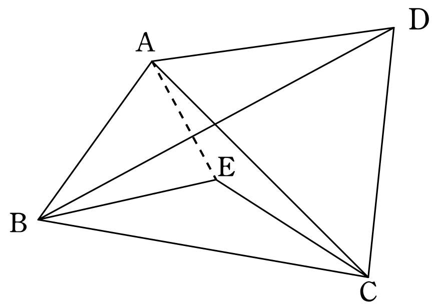
$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

が成り立つならば，四角形ABCD は円に内接することを，

$$\triangle ABD \backsim \triangle EBC$$

となるように点E をとることによって証明せよ。





着眼点

(1)から(4)は，トレミー（Ptolemy）の定理の証明です。誘導問題としましたので，手がつけやすかったものと考えます。

(5)は，トレミーの定理の逆の証明ですが，ヒントを入れましたが難問です。解けた人は自信を持っていいでしょう。

解答例

(1)　△ABE と△ACD において

仮定より　　　　　　　∠BAE＝∠CAD

$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角より　∠ABD＝∠ACD

すなわち　　　　　　　∠ABE＝∠ACD

対応する２つの角が等しいので　　$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$

(2)　(1)より，AB : AC＝BE : CD（△ABE と △ACD の相似比）である

ゆえに，　$AB \cdot CD = AC \cdot BE$

(3)　対角線 AC と BD の交点を P とする。

$\triangle AED$ と $\triangle ABC$ において、

$$\angle EAD = \angle EAP + \angle PAD = \angle EAP + \angle BAE = \angle BAC$$

また，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角より　$\angle ADB = \angle ACB$

すなわち　$\angle ADE = \angle ACB$

対応する２つの角が等しいので　$\triangle AED \backsim \triangle ABC$

よって，$AD : AC = ED : BC$（$\triangle AED$ と $\triangle ABC$ の相似比）である

ゆえに，　$AD \cdot BC = AC \cdot ED$

(4)　(2)，(3)より

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= AC \cdot BE + AC \cdot ED \\ &= AC \cdot (BE + ED) \\ &= AC \cdot BD \end{aligned}$$

(5)　$\triangle ABD \backsim \triangle EBC$ より　$BD : BC = AD : EC$

すなわち　$BC \cdot DA = BD \cdot EC$……①

また，$\triangle ABE$ と $\triangle DBC$ において、

$$\angle ABE = \angle ABD + \angle DBE = \angle EBC + \angle DBE = \angle DBC$$

$\triangle ABD \backsim \triangle EBC$ より $AB : EB = BD : BC$ であるから，

$$AB \cdot BC = EB \cdot BD$$

ゆえに，　$AB : DB = BE : BC$

よって，対応する２辺の比が等しく，その２辺に挟まれる角が等しいので，

$$\triangle ABE \backsim \triangle DBC$$

ゆえに，　$AB : DB = AE : DC$

すなわち，　$AB \cdot CD = BD \cdot AE$……②

①＋②から，　$AB \cdot CD + BC \cdot DA = BD \cdot AE + BD \cdot EC$

$$= BD \cdot (AE + EC)$$

一方，仮定から，　$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ であるから，

$$AE + EC = AC$$

が成立する。ゆえに，点E は対角線AC 上にある。

よって，$\angle ADB = \angle ECB = \angle ACB$ が成り立ち，

４点A，B，C，D は同一円周上にある。すなわち，四角形ABCD は円に内接する。

解答 (1) 仮定より、$\angle \mathrm{BAE}=\angle \mathrm{CAD}$

また、劣弧ADに対する円周角として、$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{ACD}$

すなわち、$\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{ACD}$

二角相等により、$\triangle \mathrm{ABE} \backsim \triangle \mathrm{ACD}$（証終）

(2) (1)より、$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BE}:\mathrm{CD}$（$\triangle \mathrm{ABE}$と$\triangle \mathrm{ACD}$の相似比）

故に、$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE}$

(3) 対角線ACとBDの交点をPとする。$\triangle \mathrm{AED}$と$\triangle \mathrm{ABC}$において、

$$\angle \mathrm{EAD}=\angle \mathrm{EAP}+\angle \mathrm{PAD}=\angle \mathrm{EAP}+\angle \mathrm{BAE}=\angle \mathrm{BAC}$$

また、劣弧ABに対する円周角として、$\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{ACB}$

すなわち、$\angle \mathrm{ADE}=\angle \mathrm{ACB}$

二角相等により、$\triangle \mathrm{AED} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$

よって、$\mathrm{AD}:\mathrm{AC}=\mathrm{ED}:\mathrm{BC}$（$\triangle \mathrm{AED}$と$\triangle \mathrm{ABC}$の相似比）

故に、$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{ED}$

(4) (2), (3)より、

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}&=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BE}+\mathrm{AC}\cdot\mathrm{ED}\\&=\mathrm{AC}\cdot(\mathrm{BE}+\mathrm{ED})\\&=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\end{aligned}$$（証終）

(5) $\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{EBC}$より、$\mathrm{BD}:\mathrm{BC}=\mathrm{AD}:\mathrm{EC}$

すなわち、$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{EC}$……①

$\triangle \mathrm{ABE}$と$\triangle \mathrm{DBC}$において、

$$\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{ABD}+\angle \mathrm{DBE}=\angle \mathrm{EBC}+\angle \mathrm{DBE}=\angle \mathrm{DBC}$$

$\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=\mathrm{EB}:\mathrm{BC}$であるから、$\mathrm{AB}:\mathrm{DB}=\mathrm{EB}:\mathrm{CB}$

よって、対応する二辺の比が等しく、その二辺に挟まれる角が等しいので、

$$\triangle \mathrm{ABE} \backsim \triangle \mathrm{DBC}$$

故に、$\mathrm{AB}:\mathrm{DB}=\mathrm{AE}:\mathrm{DC}$

すなわち、$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AE}$……②

①＋②から、$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AE}+\mathrm{BD}\cdot\mathrm{EC}$

$$=\mathrm{BD}\cdot(\mathrm{AE}+\mathrm{EC})$$

一方、仮定から、$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$であるから、

$$\mathrm{AE}+\mathrm{EC}=\mathrm{AC}$$

が成立する。故に、点Eは対角線AC上にある。

よって、$\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{ECB}=\angle \mathrm{ACB}$が成り立ち、4点A, B, C, Dは同一円周上にある。すなわち、四角形ABCDは円に内接する。（証終）

第３問

実数全体の集合を R とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2-2x$ とする。R の部分集合 A に対し，集合 $f(A)$ を

$$f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$$

と定める。例えば，$A=\{0,\ 1,\ 2\}$ のとき $f(A)=\{-1,\ 0\}$ であり，$A=\{x \mid 1\leqq x<2\}$ のとき $f(A)=\{y \mid -1\leqq y<0\}$ である。次の問いに答えよ。

(1)　$A=\{x \mid 2<x<4\}$ のとき，$f(A)=\{y \mid m<y<M\}$ となった。定数 m，M の値を求めよ。

(2)　$A=\{x \mid a\leqq x\leqq 3\}$ のとき，$f(A)=\{y \mid -1\leqq y\leqq 3\}$ となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(3)　$A=\{a\}$ とするとき，$A=f(A)$ が成り立つような a の値をすべて求めよ。

(4)　$A=\{x \mid x\geqq a\}$ とするとき，$A=f(A)$ が成り立つような a の値をすべて求めよ。

(5)　$A=\{x \mid a\leqq x\leqq b\}$ とするとき，$A=f(A)$ が成り立つような a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(6)　$A=f(A)$，$B=f(B)$ ならば $A\cup B=f(A\cup B)$ は成り立つか。 成り立つのなら証明し，成り立たないのなら反例を挙げよ。

着眼点

集合 $f(A)$ の意味がわかるかどうかがポイントです。問題の最初の部分は，“関数 $f(x)=x^2-2x$ の定義域を A とするとき，値域を $f(A)$ という記号で表すことにする”という意味です。(1)，(2)をやりながら集合 $f(A)$ の意味を理解すれば，(5)まではすんなり解けるでしょう。(4)，(5)は２次関数の最大･最小の問題で，問題文の表現の仕方が学校の教科書とは異なるだけです。(6)は難しいですが，(3)から(5)の結果などから成り立ちそうだと予想できれば，あとは $A\cup B\subset f(A\cup B)$ と $f(A\cup B)\subset A\cup B$ をやってみればいいでしょう。

解答例

$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の頂点は点 $(1,\ -1)$。また，$f(x)=x(x-2)$ より，この放物線は２点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通る。

(1)　$A=\{x \mid 2<x<4\}$ のとき

$$f(A)=\{f(x) \mid 2<x<4\}=\{y \mid y=f(x),\ 2<x<4\}$$

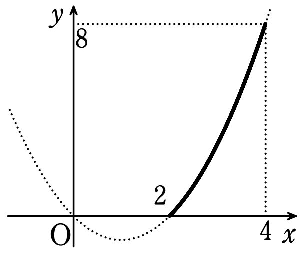
したがって，$2<x<4$ における $y=f(x)$ の値域が

$$m<y<M$$

である。グラフから，

$$m=f(2)=0,\ M=f(4)=8$$

ゆえに，$m=0$，$M=8$



(2)　$A=\{x \mid a \leqq x \leqq 3\}$ のとき

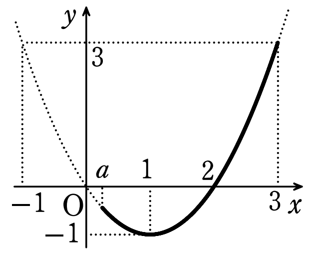
$$f(A)=\{f(x) \mid a \leqq x \leqq 3\}=\{y \mid y=f(x),\ a \leqq x \leqq 3\}$$

したがって，$a \leqq x \leqq 3$ における $y=f(x)$ の値域が

$$-1 \leqq y \leqq 3$$

となる。グラフから

$$-1 \leqq a \leqq 1$$



(3)　$A=\{a\}$ のとき

$$f(A)=\{f(x) \mid x=a\}=\{f(a)\}$$

であるから，

$$a=f(a) \quad \text{すなわち，} a=a^2-2a$$

これを解いて，$a=0,\ 3$

(4)　$A=\{x \mid x \geqq a\}$ のとき

$$f(A)=\{f(x) \mid x \geqq a\}=\{y \mid y=f(x),\ x \geqq a\}$$

一方，$A=f(A)$ より，$f(A)=\{y \mid y \geqq a\}$

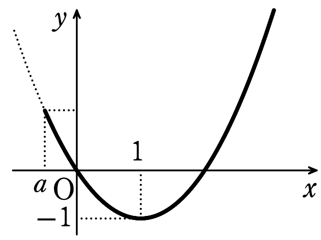
したがって，$x \geqq a$ における $y=f(x)$ の値域が $y \geqq a$，すなわち，$x \geqq a$ における $f(x)$ の最小値が a となればよい。

（ｉ）　$a \leqq 1$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(1)=-1$ であるから，

$$a=-1$$

これは $a \leqq 1$ を満たす



（ii）　$a>1$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(a)=a^2-2a$ であるから，

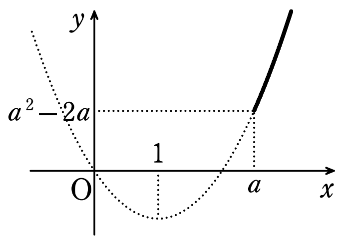
$$a=a^2-2a$$

$$a^2-3a=0$$

$$a(a-3)=0$$

$a>1$ であるから，$a=3$

ゆえに，（ｉ）（ii）より，$a=-1,\ 3$



(5)　$A=\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ のとき

$$f(A)=\{f(x) \mid a \leqq x \leqq b\}=\{y \mid y=f(x),\ a \leqq x \leqq b\}$$

一方，$A=f(A)$ より，$f(A)=\{y \mid a \leqq x \leqq b\}$

したがって，$a \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の値域が $a \leqq x \leqq b$，すなわち，$a \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の最小値が a，最大値が b となればよい。

（ｉ）　$a<b<1$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(b)=b^2-2b$

最大値は $f(a)=a^2-2a$

であるから，

$$\begin{cases} b^2-2b=a & \cdots① \\ a^2-2a=b & \cdots② \end{cases}$$

①−②より

$$b^2-a^2-2b+2a=a-b$$

$$b^2-a^2-b+a=0$$

$$(b+a)(b-a)-(b-a)=0$$

$$(b-a)(b+a-1)=0$$

$b \fallingdotseq a$ であるから

$$b+a-1=0$$

$$a=1-b \quad \cdots ③$$

③を①に代入して

$$b^2-2b=1-b$$

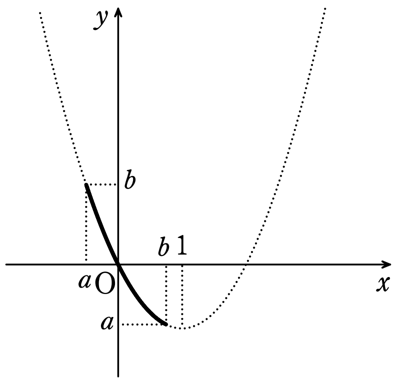
$$b^2-b-1=0$$

$$b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$b<1$ より　　$b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

③より　　$a=1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

これは $a<b$ を満たさないので不適



（ⅱ）$a \leqq 1 \leqq b$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(1)=-1$ であるから $a=-1$

したがって，$-1 \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の最大値が b となればよい。

$f(-1)=3=f(3)$ であるから，

$b<3$ とすると $f(-1)>f(b)$ となり，

最大値が $f(-1)=3$ となるので不適。

よって，$b \geqq 3$ であり，そのとき最大値は

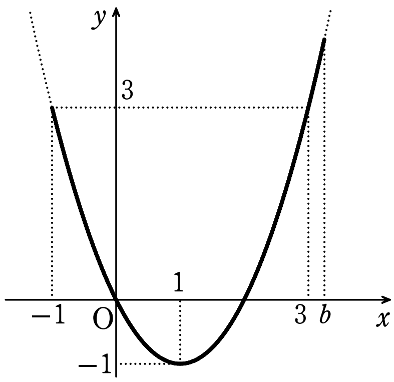
$$f(b)=b^2-2b$$

となるので，

$$b^2-2b=b$$

これを解いて，$b=0,\ 3$

$b \geqq 3$ より，$b=3$　　ゆえに，$a=-1$，$b=3$



（ⅲ）$1<a<b$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(a)=a^2-2a$

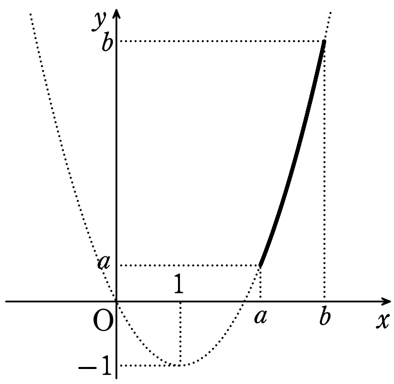
最大値は $f(b)=b^2-2b$

であるから，

$$\begin{cases} a^2-2a=a \\ b^2-2b=b \end{cases}$$

これを解いて，　$a=0,\ 3$，　$b=0,\ 3$

$1<a<b$ を満たす解は存在しないので不適



（ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)より，条件を満たす a，b の組は

$$(a,\ b)=(-1,\ 3)$$

⑹　$A=f(A)$，$B=f(B)$ とする

（ⅰ）　$x\in A\cup B$ とすると

$x\in f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)\cup f(A\cup B)=f(A\cup B)$

よって，$x\in f(A\cup B)$　　　ゆえに，$A\cup B\subset f(A\cup B)$

（ⅱ）　$y\in f(A\cup B)$ とすると

$y=f(x)$ を満たす $x\in A\cup B$ が存在する

$x\in A$ のときは $y\in f(A)$，$x\in B$ のときは $y\in f(B)$

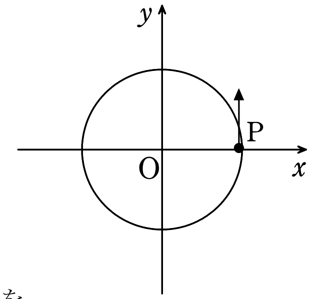
よって，$y\in f(A)\cup f(B)$ となるから

$y\in A\cup B$　　ゆえに，$f(A\cup B)\subset A\cup B$

（ⅰ)(ⅱ)より，$A\cup B=f(A\cup B)$

第４問

　次のようなゲームをする。１個のさいころを投げ，１の目が出れば10°，２の目が出れば20°，３の目が出れば30°，４の目が出れば40°，５の目が出れば50°，６の目が出れば60°，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。今，点P は図の位置から出発する。次の問いに答えよ。



⑴　ちょうど１周するのに，さいころを投げる回数が最も少ないのはどのような場合か。

⑵　⑴の回数でさいころを投げたとき，点P が到達できる位置をすべて答えよ。

⑶　A，B，C，Dの４人がゲームの仕方を次のようにアレンジした。

A～１個のさいころを最大７回投げ，偶数の目が出た場合のみ，２の目が出れば20°，４の目が出れば40°，６の目が出れば60°，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。奇数の目が出た場合は回数は数えるが，点P はその場にとどまる。ただし，点P がちょうど１周したら，さいころを投げるのをやめるものとする。

B～大小のさいころを２個投げ，目の和が偶数の場合のみ，(目の和)×10°，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。これを最大４回繰り返す。目の和が奇数の場合は回数には数えるが，点P はその場にとどまる。ただし，点P がちょうど１周したら，さいころを投げるのをやめるものとする。

C～１個のさいころを８回投げ，素数の目の場合のみ，(目の数)×10°，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。素数以外の目が出た場合は，回数は数えるが，点P はその場にとどまる。

D～さいころではなく，硬貨を８回投げて，表が出たら30°，裏が出たら60°，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。

それぞれがちょうど１周するのは何通りあるか。また，その確率を求めよ。

⑷　Cの提案した方法でゲームをすることとする。

（ⅰ）さいころを１回投げたときの回転する角度の期待値を求めよ。

（ⅱ）１個のさいころを８回投げ，素数の目の場合のみ，(目の数)×10°，点P を図の原点O を中心に円周上を反時計周りに回転させる。素数以外の目が出た場合は，回数は数えるが，点P はその場にとどまる。ちょうど１周した者のうち，初めに５の目が出た者には500円，３が出た者には300円，２が出た者には200円の賞金が与えられるものとする。賞金の期待値はどのようになるか。

着眼点

⑴　６の目が出れば60°回転させるので，６回連続で６の目が出れば，最も早く１周する。

(2)　６回で最小の角度は $60°$，最大の角度は $360°$ である。

(3)A～さいころを６回投げて１周する場合と，７回投げて１周する場合がある。

B～２個のさいころを３回投げて１周する場合と，４回投げて１周する場合がある。

C～１から６までの数字で素数は２，３，５である。最大で５であるから，さいころを７回投げても１周は回れない。８回投げた場合のみ考える。

D～ちょうど１周するのは，表が４回，裏が４回出る場合のみである。

(4)（ⅰ）２の目が出れば $20°$，３の目がでれば $30°$，５の目が出れば $50°$ 回せばよい。その他の目では動かさない。さいころの目の確率はどれも $\dfrac{1}{6}$ である。

（ⅱ）初めに５の目が出るのは 21 通り，初めに３の目が出るのは 7 通り，初めに２の目が出るのは 0 通りであるから，その確率とそれぞれの賞金をかけあわせて，その和を求める。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)　最も早く１周するのは，６の目が連続で６回出る場合である。

(2)　６回で最小の角度はさいころの目がすべて１の場合で $60°$，最大の角度はすべて６の目が出た場合で $360°$ である。それらの間は $10°$ きざみで考えられる。したがって，求める位置は 31 通りあって，点Pが出発した位置から反時計周りに

$50°+n\times10°$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 31$）回転させた位置である。

(3)A（ⅰ）さいころを６回投げる場合

すべて６の目が出る場合なので１通り

（ⅱ）さいころを７回投げる場合

奇数の目が１回と６の目が６回，かつ，７回目は６の目が出る場合は

$3\times6=18$ 通り

２と４の目が１回ずつと６の目が５回出る場合は $\dfrac{7!}{5!}=42$ 通り

４の目が３回と６の目が４回出る場合は $\dfrac{7!}{3!4!}=35$ 通り

（ⅰ)(ⅱ)より，ちょうど１周するような目の出方は，$1+18+42+35=96$ 通りあって，

その確率は $\dfrac{1}{6^6}+\dfrac{95}{6^7}=\dfrac{101}{6^7}=\dfrac{101}{279936}$

B（ⅰ）２個のさいころを３回投げる場合

すべて６の目が出る場合なので１通り

（ⅱ）２個のさいころを４回投げる場合

目の和が奇数になるのが１回と２個とも６の目が出るのが３回，かつ，４回目は２個とも６の目が出る場合は $3\times18\times1=54$ 通り

４回とも目の和が偶数で，ちょうど１周する場合を考える。

2 から 12 までの偶数を４つ足して 36 になればよいので，４つの偶数の組合せで考えると，

$(2,\ 10,\ 12,\ 12) \to \dfrac{4!}{2!} \times 1 \times 3 \times 1 \times 1 = 36$ 通り

$(4,\ 8,\ 12,\ 12) \to \dfrac{4!}{2!} \times 3 \times 5 \times 1 \times 1 = 180$ 通り

$(4,\ 10,\ 10,\ 12) \to \dfrac{4!}{2!} \times 3 \times 3 \times 3 \times 1 = 324$ 通り

$(6,\ 6,\ 12,\ 12) \to \dfrac{4!}{2!2!} \times 5 \times 5 \times 1 \times 1 = 150$ 通り

$(6,\ 8,\ 10,\ 12) \to 4! \times 5 \times 5 \times 3 \times 1 = 1800$ 通り

$(6,\ 10,\ 10,\ 10) \to \dfrac{4!}{3!} \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ 通り

$(8,\ 8,\ 8,\ 12) \to \dfrac{4!}{3!} \times 5 \times 5 \times 5 \times 1 = 500$ 通り

$(8,\ 8,\ 10,\ 10) \to \dfrac{4!}{2!2!} \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 = 1350$ 通り

（ⅰ)(ⅱ)より，ちょうど１周するような目の出方は

$$1 + 54 + 36 + 180 + 324 + 150 + 1800 + 540 + 500 + 1350 = 4935 \text{ 通り}$$

あって，その確率は，$\dfrac{1}{6^6} + \dfrac{4934}{6^8} = \dfrac{4970}{6^8} = \dfrac{2485}{3 \times 6^7} = \dfrac{2485}{839808}$

C　素数は２，３，５であり，８回投げてちょうど１周するには，３が２回，５が６回出る場合しかないので，そのような目の出方は $\dfrac{8!}{2!6!} = 28$ 通りあって，その確率は

$\dfrac{28}{6^8} = \dfrac{7}{3^2 \times 6^6} = \dfrac{7}{419904}$

D　表が x 回出るとすると，裏は $8-x$ 回出るので，８回の試行で回転する角度は $x \times 30^\circ + (8-x) \times 60^\circ$ であり，これが 360° に等しくなるのは $x=4$ のときである。
したがって，ちょうど１周するのは，表と裏が４回ずつ出るときなので，表と裏の出方は $\dfrac{8!}{4!4!} = 70$ 通りあって，その確率は $\dfrac{70}{2^8} = \dfrac{35}{128}$

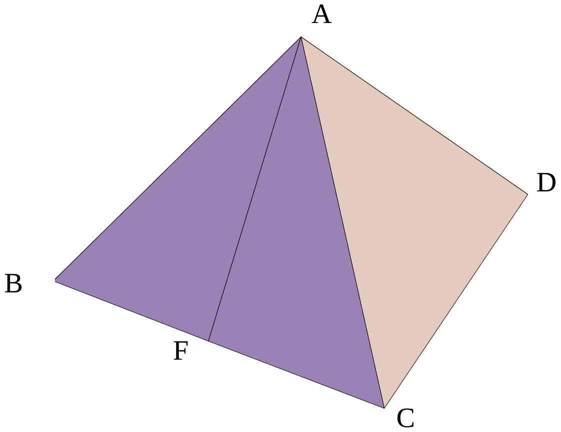
(4)（ⅰ）　$20^\circ \times \dfrac{1}{6} + 30^\circ \times \dfrac{1}{6} + 50^\circ \times \dfrac{1}{6} = \left(\dfrac{100}{6}\right)^\circ = \left(\dfrac{50}{3}\right)^\circ$

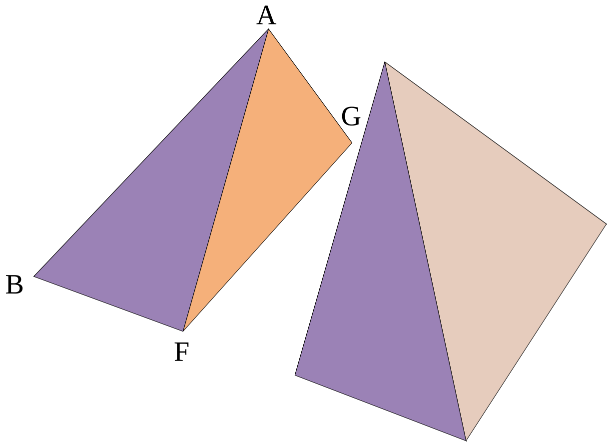
（ⅱ）　(3)の結果から，初めに２が出ることはない。初めに３が出るのは 7 通り，初めに５が出るのは 21 通りあるから，賞金の期待値は

$$200 \times \frac{0}{6^8} + 300 \times \frac{7}{6^8} + 500 \times \frac{21}{6^8} = \frac{12600}{6^8} = \frac{350}{6^6} = \frac{175}{3 \times 6^5} = \frac{175}{23328} \text{（円）}$$

[解答例]
（１）ピラミッド A-BCDE の底面積は１辺が a の正方形なので、

底面 BCDE の面積＝a^2 …①





△ABF は直角三角形なので、 $AF^2+BF^2=AB^2$ より

$AB=a$，$BF=\dfrac{a}{2}$ より、$AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

ピラミッド A-BCDE の高さを h とすると、△AFH も直角三角形より　$AF^2=h^2+FH^2$

$AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$FH=\dfrac{a}{2}$ を代入して

$$h=\frac{a}{\sqrt{2}}\ （高さ）\cdots②$$

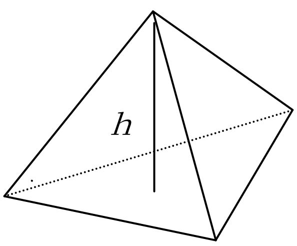
$V_0=\dfrac{1}{3}\times a^2\times h$　①②を代入して

$V_0=\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$ ・・・(答)

（２）（２）の解答には様々な方法がある。

[方法１]

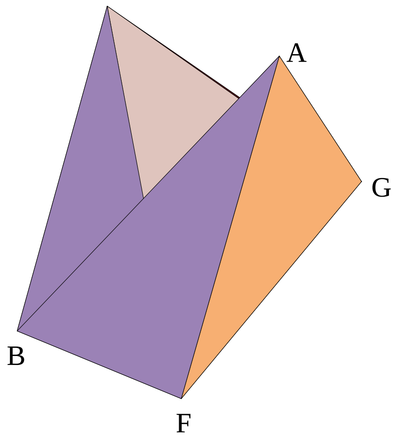
１辺の長さ p の正四面体の体積 W を求める。



底面積＝$\dfrac{\sqrt{3}}{4}p^2$

高さ＝$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}p$

W＝$\dfrac{\sqrt{2}}{12}p^3\cdots③$



求める合成された立体の体積は

『三角柱の体積』－『１辺 $\dfrac{a}{2}$ の正四面体の体積』

であることがわかる。

三角柱の体積＝△AFG の面積×BF

$$=\frac{1}{2}\times FG\times 高さ\times BF$$

$BF=\dfrac{a}{2}$，$h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$FG=a$ を代入して

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}a^3\cdots④$$

１辺 $\dfrac{a}{2}$ の正四面体の体積＝$\dfrac{\sqrt{2}}{12}\left(\dfrac{a}{2}\right)^3$

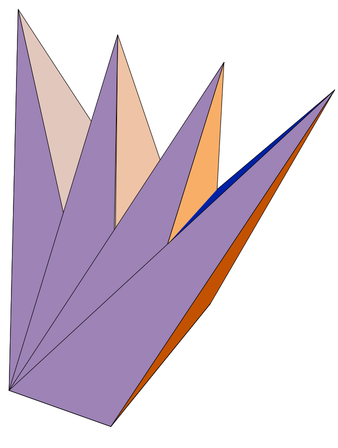
$$=\frac{\sqrt{2}}{96}a^3\cdots⑤$$

『三角柱の体積』－『１辺 $\dfrac{a}{2}$ の正四面体の体積』

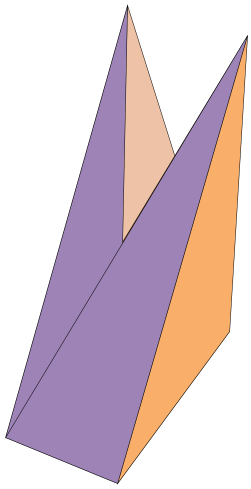
＝①－②

＝$\dfrac{11}{96}\sqrt{2}\,a^3$ ・・・(答)

（３）



「困難は分割せよ。(デカルト)」の言葉に従って、中央部分の２個と両端部分の２個を分離してみる方法で体積を求める。



中央部分の三角柱は、４分割したので、幅は $\dfrac{a}{4}$

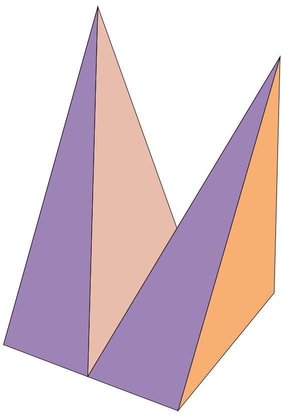
『中央部分の三角柱の体積』$= \dfrac{ah}{2} \times \dfrac{a}{4}$

$$= \frac{a^3}{8\sqrt{2}}$$

『小三角柱の体積』$= \dfrac{a}{2} \times \dfrac{h}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a}{4} = \dfrac{a^3}{32\sqrt{2}}$

『２つの小分割ピラミッドの体積』$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a}{4} \times \dfrac{a}{2} \times \dfrac{h}{2}$

$$= \frac{a^3}{48\sqrt{2}}$$



『除外される小四面体の体積』＝『小三角柱の体積』
－『２つの小分割ピラミッドの体積』

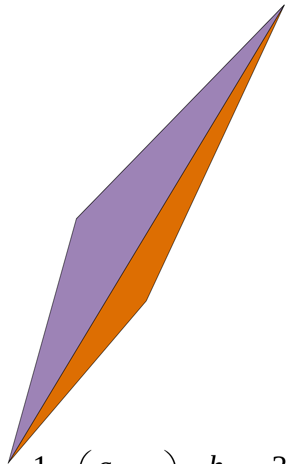
$$= \frac{a^3}{32\sqrt{2}} - \frac{a^3}{48\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a^3}{96\sqrt{2}}$$

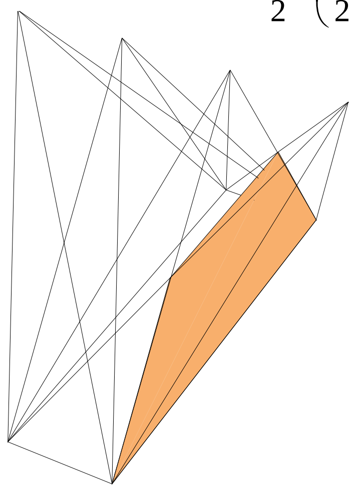
『中央部分の体積』＝『中央部分の三角柱の体積』
－『除外される小四面体の体積』

$$= \frac{a^3}{8\sqrt{2}} - \frac{a^3}{96\sqrt{2}} = \frac{11a^3}{96\sqrt{2}} \cdots ⑥$$

次にサイドの扁平四角錐の体積を求める。



『底面の台形面積』$= \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{a}{2} + a \right) \times \dfrac{h}{2} = \dfrac{3a^2}{8\sqrt{2}}$

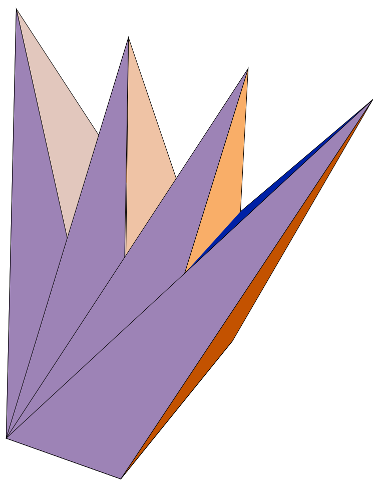


『扁平四角錐の体積』$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3a^2}{8\sqrt{2}} \times \dfrac{a}{4} = \dfrac{a^3}{32\sqrt{2}} \cdots ⑦$

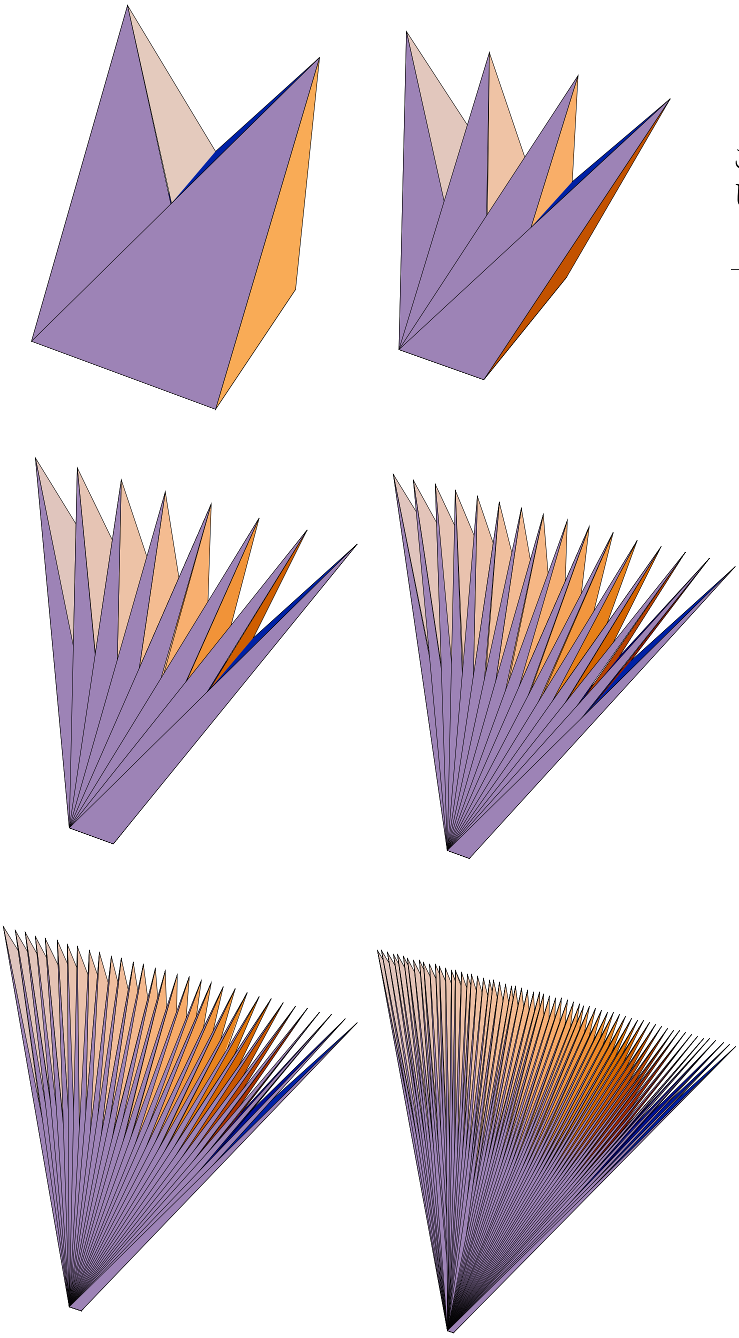
求める合成された立体の体積＝⑥＋２×⑦

$$= \frac{11a^3}{96\sqrt{2}} + \frac{a^3}{32\sqrt{2}}$$

$$= \frac{17a^3}{96\sqrt{2}}$$ ・・・（答）



（４）
この操作をｎ回実施したときの立体の体積を求める。



ｎ回実施するとこの合成された立体の底面について

底面積$=\dfrac{a}{2^n}\times a=\dfrac{a^2}{2^n}$

上半分と下半分に分割して体積を求める。

（ｉ）上半分について

上半分には2^n個の四角錐が存在する。

2^n個のうち１つの四角錐の体積を求める。

底面積$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{2^n}\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{2^{n+2}}$

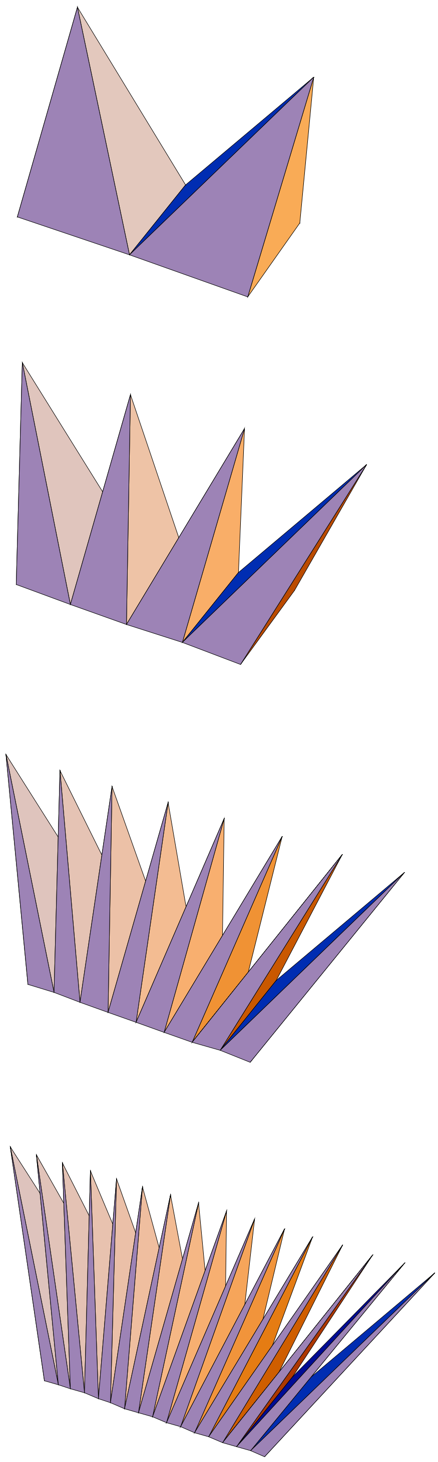
高さ$=\dfrac{h}{2}=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$

「2^n個のうち１つの四角錐の体積」$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{a^2}{2^{n+2}}\times\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{a^3}{2^{n+3}\sqrt{2}}$

この四角錐が2^n個存在して、しかもすべての体積が等しいので、

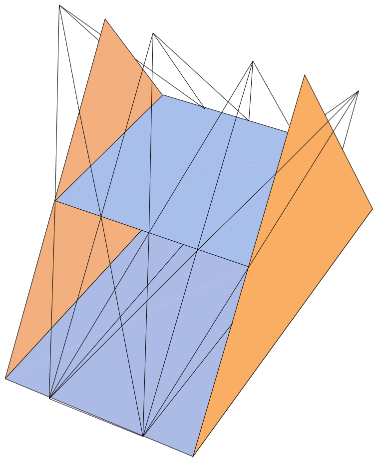
上半分の体積$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{a^3}{2^{n+3}\sqrt{2}}\times 2^n=\dfrac{a^3}{24\sqrt{2}}$ …（＊１）



（ii）下半分について

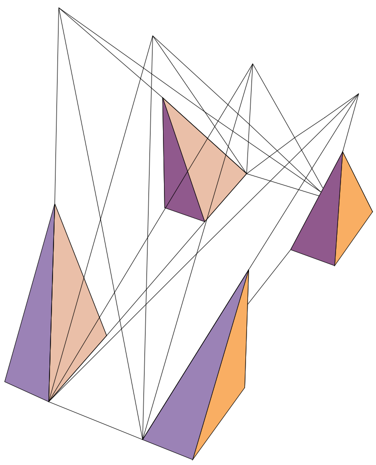
幅$\dfrac{a}{2}$の三角柱の体積$=\dfrac{1}{2}ah\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^3}{4\sqrt{2}}$

三角柱の下半分の体積$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{a^3}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3a^3}{16\sqrt{2}}\cdots$（＊２）



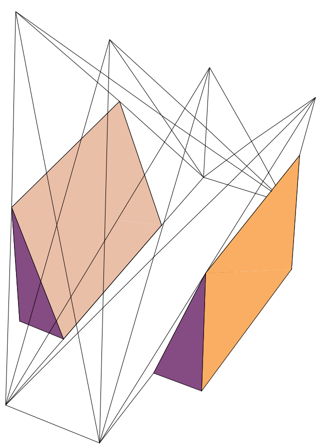
４つの角からなる四角錐の体積

$=\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2^n}\right)\times\dfrac{a}{2}\times\dfrac{h}{2}\times\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2^n}\right)\times\dfrac{a^2}{12\sqrt{2}}\cdots$（＊３）



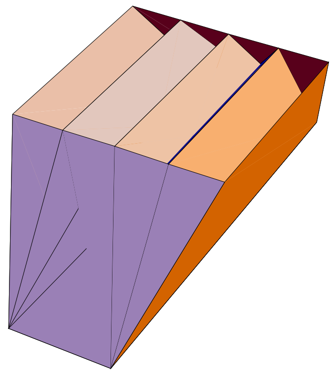
共通部分の三角柱の体積$=\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2^n}\right)\times\dfrac{h}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{2}$

$=\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2^n}\right)\times\dfrac{a^2}{8\sqrt{2}}\cdots$（＊４）



下半分の体積＝（＊２）－（＊３）－（＊４）

$$\frac{3a^3}{16\sqrt{2}}-\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2^n}\right)\times\frac{a^2}{12\sqrt{2}}-\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2^n}\right)\times\frac{a^2}{8\sqrt{2}}$$



（ｉ）（ii）より

（＊１）＋下半分の体積

$$V_n=\frac{a^3}{24\sqrt{2}}+\frac{3a^3}{16\sqrt{2}}-\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2^n}\right)\times\frac{a^2}{12\sqrt{2}}-\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2^n}\right)\times\frac{a^2}{8\sqrt{2}}$$

$$=\frac{a^3}{48\sqrt{2}}\left(6+\frac{10}{2^n}\right)$$ ・・・(答)