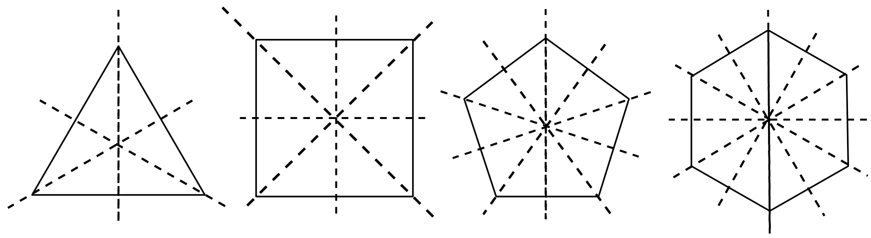
第１問　問題

平面図形の線対称性について考える。

一般に，正 n 角形の対称軸は n 本ある。



以下では正 n 角形ではない n 角形について考えよう。

＜n が奇数の場合＞

対称軸があるとすれば，その対称軸はある頂点から対辺に下ろした垂線である。

⑴　$n=3$，すなわち，３角形で，対称軸が１本しかない図形の例を一つ図示せよ。

⑵　$n=5$，すなわち，５角形で，対称軸が１本しかない図形の例を一つ図示せよ。

＜n が偶数の場合＞

対称軸があるとすれば，その対称軸は次の２種類に分類できる。

（A）相対する頂点どうしを結ぶ対角線

（B）相対する辺の中点どうしを結ぶ線

まず，$n=4$，すなわち，４角形について考える。

⑶　対称軸が１本しかない４角形の例を，(A)(B)それぞれについて一つずつ図示せよ。

⑷　対称軸が２本ある４角形で，２本とも(A)となるもの，２本とも(B)となるものの例をそれぞれ一つずつ図示せよ。

次に，$n=6$，すなわち，６角形について考える。

⑸　対称軸が１本しかない６角形の例を，(A)(B)それぞれについて一つずつ図示せよ。

⑹　対称軸が２本ある６角形で，そのうち１本が(A)，他の１本が(B)となるものの例を一つ図示せよ。

⑺　対称軸が３本ある６角形で，３本とも(A)となるもの，３本とも(B)となるものの例をそれぞれ一つずつ図示せよ。

注）図示する際には，対称軸も明示せよ。

第２問　問題

壺に入った８ℓ の油を，目盛りのない５ℓ と３ℓ の２つの容器だけを使い，半分にするには以下の表のような手順で行なうとよい。

＜Ａ＞

手順	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
8ℓ	5	5	2	2	7	7	4
5ℓ	0	3	3	5	0	1	1
3ℓ	3	0	3	1	1	0	3

①壺から３ℓ 容器でくみ出す
②３ℓ 容器から５ℓ 容器に移す
③壺から３ℓ 容器でくみ出す
④３ℓ 容器から５ℓ 容器に移す(１ℓ 残る)
⑤５ℓ 容器で壺に戻す
⑥３ℓ 容器から５ℓ 容器に移す(１ℓ)
⑦壺から３ℓ 容器でくみ出す

＜Ｂ＞

手順	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
8ℓ	3	3	6	6	1	1	4
5ℓ	5	2	2	0	5	4	4
3ℓ	0	3	0	2	2	3	0

①壺から５ℓ 容器でくみ出す
②５ℓ 容器から３ℓ 容器に移す(２ℓ 残る)
③３ℓ 容器で壺に戻す
④５ℓ 容器から３ℓ 容器に移す(２ℓ)
⑤壺から５ℓ 容器でくみ出す
⑥５ℓ 容器から３ℓ 容器に移す(１ℓ)
⑦３ℓ 容器で壺に戻す

⑴　壺に入った10ℓ の油を，目盛りのない７ℓ と３ℓ の２つの容器だけを使い，半分にする異なる手順を２通り，表で示しなさい。ただし，手順は９回以内とする。

⑵　壺に入った16ℓ の油を，目盛りのない９ℓ と７ℓ の２つの容器だけを使い，半分にする異なる手順を２通り，表で示しなさい。ただし，手順は15回以内とする。

⑶　問題文の作業は，
＜Ａ＞の場合，３ℓ 容器で３回くみ出し，５ℓ 容器で１回戻す。
＜Ｂ＞の場合，５ℓ 容器で２回くみ出し，３ℓ 容器で２回戻す。
といい換えることができる。その理由を式を使って説明し，＜Ａ＞，＜Ｂ＞の次に最短であると思われる方法を２通り示しなさい。ただし，量の変化しない移しかえを繰り返すことはしないものとする。（最短である説明は不要）

⑷　壺に入った16ℓ の油を，目盛りのない11ℓ と６ℓ の２つの容器だけを使い，半分にするための最短手順は，それぞれの容器をどのように何回使えばよいか，説明し答えなさい。（最短である説明は不要）

⑸　壺に入った42ℓ の油を，目盛りのない27ℓ と12ℓ の２つの容器だけを使い，半分にするための最短手順は，それぞれの容器をどのように何回使えばよいか，説明し答えなさい。（最短である説明は不要）

第３問　問題

等幅曲線（定幅曲線）

等幅曲線（定幅曲線）とは，曲線で囲まれた図形で，平行線で挟んだときの間隔が一定である（その幅を計ったとき，どこで計っても等しい幅になる）図形のことである。

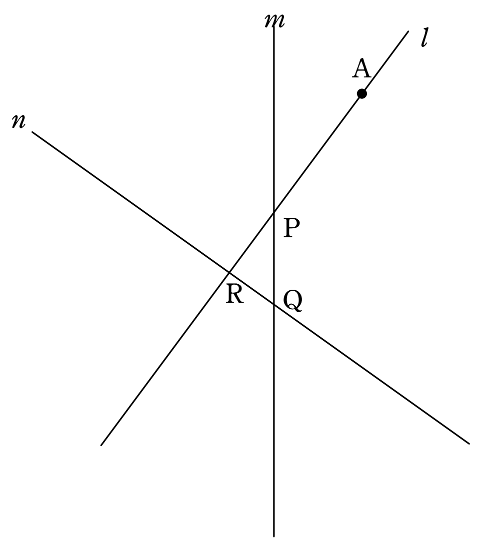
互いに平行でない３本の直線 l，m，n があり，l と m の交点を P，m と n の交点を Q，n と l の交点を R とする。中央にできる三角形 PQR の外側，かつ，直線 l 上で，この三角形からある程度十分離れた位置に任意の点 A をとる。P を中心にして，PA を半径とする弧を描き，直線 m との交点を B とする。

⑴　上の作業に引き続いて，答案用紙の図形に等幅な曲線を書き加えなさい。その際，曲線と直線との交点を，A，B に引き続き，順に，C，D，E，F としなさい。そして，等幅曲線を完成させせなさい。作図の途中作業が明白にわかるように，補助線などは消さないで残しなさい。

⑵　RA の長さを a とする。作図の最後で，点 F から点 A への曲線を描くとき，RF$=a$ になることを示しなさい。

⑶　完成された図形が等幅であることを示しなさい。どのように描いていったかなどを説明しながら示しなさい。

⑷　平行線で挟んだときの間隔（等幅である幅）を d とするとき，この曲線の長さが πd であることを示しなさい。

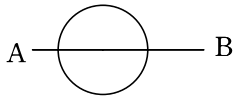


（作図の際は，コンパス等を用いてもよい）

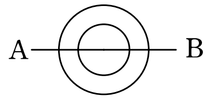
第４問　問題

下図において，Ａ から Ｂ まで一筆書きの方法は何通りあるか。

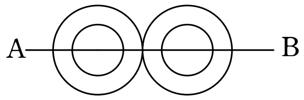
(1)



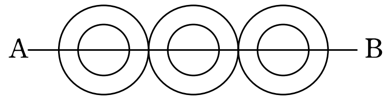
(2)



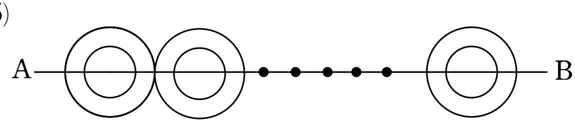
(3)

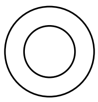


(4)



(5)



 は n 個あるとする。

第５問　問題

数 a と数の集合 A に対し，数の集合

$$\{ax \mid x \in A\}$$

aA で表す。特に，$a=1$ のときは，$1A=A$ と定める。

いま，整数全部の集合

$$\{\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

を Z で表すこととする。そのとき，

$$2Z=\{\cdots,\ -6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$$

となる。

また，２つの数 a，b と数の集合 A に対し，

$$\{ax+by \mid x \in A,\ y \in A\}$$

を $aA+bA$ と表す。例えば，

$$3Z=\{\cdots,\ -9,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$$

$$5Z=\{\cdots,\ -15,\ -10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ \cdots\}$$

だから，

$$3Z+5Z=\{\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

となる。

⑴　$4Z+6Z$ を上のように要素を５つ書き並べて表せ。

⑵　$4Z+6Z=2Z$ であることを示せ。

⑶　一般に，0 でない２つの整数 a，b に対して，a と b の最大公約数を d とするとき，

$$aZ+bZ=dZ$$

であることを示せ。

ここで，整数の範囲を広げて，

$$A=Z+\sqrt{2}\,Z=\{m+n\sqrt{2} \mid m \in Z,\ n \in Z\}$$

$$B=Z+\sqrt{10}\,Z=\{m+n\sqrt{10} \mid m \in Z,\ n \in Z\}$$

の世界で考えよう。

⑷　$7A+(4+\sqrt{2})A$ の要素を５つあげよ。

⑸　$7A+(4+\sqrt{2})A=(3-\sqrt{2})A$ であることを示せ。

⑹　$2B+\sqrt{10}\,B=\alpha B$ となるような $\alpha \in B$ が存在しないことを証明せよ。