第５問

配点　各問８点。

講評

(1) ほとんどの生徒が正解でした。(当然と言えば当然か)

(2) ２勝１敗の場合, A が単独優勝できないことを一言説明してほしい。
また,漢字のことですが,「確立」ではなく「**確率**」ですし,「優賞」ではなく「**優勝**」です。

(3) (平君[札南]の答案)

(勝利数) − (敗戦数) = 1 より,各チームは奇数回試合をするので,このチームが単独優勝するためには,他の全てのチームが (勝利数) − (敗戦数) $\leqq -1$ でなければならない。

しかし,このときリーグ戦全体で (勝利数) − (敗戦数) < 0 となるが,全体の勝利数と敗戦数は等しいので,これは成り立たない。

よって,このチームは単独優勝できない。

平君以外に,加藤君(札白石),大島君(旭東),上野さん(北見北斗),新覚さん(札北),葭本君(釧路湖陵),千葉君(苫東)たちの答案は,よく書かれていました。
このような問題を解く場合,全体に共通する条件を洗い出すと見えてくることがよくあります。

(4) 正解者は数人いましたが,説明が十分ではない答案が目立ちました。

(5) 千葉君(苫東)の答案が光りました。

ところで,後で知ったのですが, 2003 年の京都大学(前期)の問題に次のようなものがありましたので,ご紹介します。

[文系] 4 チームがリーグ戦を行う。すなわち,各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし,勝つ確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ で,各回の勝敗は独立に決まるものとする。勝ち数の多い順に順位をつけ,勝ち数が同じであればそれらは同順位とする。 1 位のチーム数の期待値を求めよ。

(答)　$\dfrac{13}{8}$

[理系] n チームがリーグ戦を行う。すなわち,各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし,勝つ確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ で,各回の勝敗は独立に決まるものとする。このとき, $(n-2)$ 勝１敗のチームがちょうど２チームである確率を求めよ。ただし, n は３以上とする。

(答)　$\dfrac{n(n-1)(n-2)(2^{n-3}-1)}{2^{3(n-2)}}$

北海道札幌開成高等学校　古川　政春

[付録]　$n=7$ のとき,A, B, C, D, E, F, G の7チームによるリーグ戦でAチームが単独優勝する確率はどうなるのだろうか。

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	○	○	○	○	○	○
B	×	＼					
C	×		＼				
D	×			＼			
E	×				＼		
F	×					＼	
G	×						＼

全試合数は ${}_7\mathrm{C}_2=21$ (試合)となる。
Aの勝敗に従って,場合に分ける。

(i) 6勝0敗のとき,
Aの単独優勝となる。このときの確率は, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{1}{64}$

(ii) 5勝1敗のとき,
たとえば,AがBに敗れた場合,Bの勝敗に従って,場合に分ける。

(a) 4勝2敗のとき,
右表のように,Bが敗れる2チームの選び方が, ${}_5\mathrm{C}_2=10$ (通り)
その2チームが残りを全勝する場合を除くとよいから,その場合の数は

$$2^{10}-2\cdot2^6 \text{ (通り)}$$

よって,このときの確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2\cdot(2^{10}-2\cdot2^6)=\frac{105}{4096}$$

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	○	○	○	○	○
B	○	＼	○	○	○	×	×
C	×	×	＼				
D	×	×		＼			
E	×	×			＼		
F	×	○				＼	
G	×	○					＼

(b) 3勝3敗のとき,
右表のように,Bが敗れる3チームの選び方が, ${}_5\mathrm{C}_3=10$ (通り)
その3チームが残りを全勝する場合を除くとよいから,その場合の数は

$$2^{10}-3\cdot2^6 \text{ (通り)}$$

よって,このときの確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3\cdot(2^{10}-3\cdot2^6)=\frac{195}{8192}$$

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	○	○	○	○	○
B	○	＼	○	○	×	×	×
C	×	×	＼				
D	×	×		＼			
E	×	○			＼		
F	×	○				＼	
G	×	○					＼

(c) 2勝4敗のとき,
右表のように,Bが敗れる4チームの選び方が, ${}_5\mathrm{C}_4=5$ (通り)
その4チームが残りを全勝する場合を除くとよいから,その場合の数は

$$2^{10}-4\cdot2^6 \text{ (通り)}$$

よって,このときの確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_4\cdot(2^{10}-4\cdot2^6)=\frac{45}{4096}$$

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	○	○	○	○	○
B	○	＼	○	×	×	×	×
C	×	×	＼				
D	×	○		＼			
E	×	○			＼		
F	×	○				＼	
G	×	○					＼

(d) 1 勝 5 敗のとき,

右表のように,B が敗れる 5 チームが残りを全勝する場合を除くとよいから,その場合の数は

$$2^{10}-5\cdot 2^{6}\ (\text{通り})$$

よって,このときの確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot {}_6\mathrm{C}_1\cdot(2^{10}-5\cdot 2^{6})=\frac{33}{16384}$$

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	○	○	○	○	○
B	○	＼	×	×	×	×	×
C	×	○	＼				
D	×	○		＼			
E	×	○			＼		
F	×	○				＼	
G	×	○					＼

(iii) 4 勝 2 敗のとき,

A が敗れる 2 チームの選び方が

$${}_6\mathrm{C}_2=15\ (\text{通り})$$

たとえば,A が B, C に敗れた場合,

B, C の勝敗に従って,場合に分ける。

ただし,B が C に勝つ場合とその逆の場合の 2 通りあるが,いまは B が C に勝つ場合に限定して考察する。

(a) B, C がともに 3 勝 3 敗のときで,

B, C が A 以外の同一チームに勝つ場合。たとえば,右表のように B, C がともに D に勝つような場合である。

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	×	○	○	○	○
B	○	＼	○	○	×	×	×
C	○	×	＼	○	○	×	×
D	×	×	×	＼			
E	×	○	×		＼		
F	×	○	○			＼	
G	×	○	○				＼

このとき,E, F, G が 3 敗以上となる場合の数は,D, E, F, G の 4 チームのリーグ戦において,E が 1 敗以上,F, G が 2 敗以上となる場合の数だから

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	○
E	×	＼	○	○
F	×	×	＼	○
G	×	×	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	○
E	×	＼	○	○
F	×	×	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	○
E	×	＼	○	×
F	×	×	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	○
E	×	＼	×	○
F	×	○	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	○	×
F	×	×	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	×	○
F	×	○	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	×	○
E	×	＼	○	○
F	○	×	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	×
E	×	＼	○	○
F	×	×	＼	○
G	○	×	×	＼

の8通りあるので,このような場合の確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot{}_6\mathrm{C}_2\cdot 2\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot 8=\frac{45}{2^{15}}$$

(b) B, C がともに3勝3敗のときで,B, C が A 以外のチームに対し,同一チームに勝つことがない場合。たとえば,右表のように B が D に勝ったならば,C は D に敗れるような場合である。

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	×	○	○	○	○
B	○	＼	○	○	×	×	×
C	○	×	＼	×	○	○	×
D	×	×	○	＼			
E	×	○	×		＼		
F	×	○	×			＼	
G	×	○	○				＼

このとき,D, E, F, G がすべて3敗以上となる場合の数は,D, E, F, G の4チームのリーグ戦において,D, E, F が1敗以上,G が2敗以上の場合の数だから,

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	×	×
F	×	○	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	×	○
F	×	○	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	×	○
F	×	○	＼	○
G	×	×	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	○	×
F	×	×	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	×	○
E	×	＼	×	○
F	○	○	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	×	○
E	×	＼	○	×
F	○	×	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	×	○
E	×	＼	○	○
F	○	×	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	×	○
E	×	＼	○	○
F	○	×	＼	○
G	×	×	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	×
E	×	＼	×	○
F	×	○	＼	○
G	○	×	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	×
E	×	＼	○	○
F	×	×	＼	○
G	○	×	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	×	○
E	○	＼	×	○
F	○	○	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	×	○
E	○	＼	○	×
F	○	×	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	×
E	○	＼	×	○
F	×	○	＼	○
G	○	×	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	×	×
E	×	＼	○	○
F	○	×	＼	○
G	○	×	×	＼

の14通りある。よって,このときの確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot{}_6C_2\cdot 2\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_2\cdot 14=\frac{315}{2^{17}}$$

(c) Bが3勝3敗,Cが2勝4敗のときで,右表のようにB, CがA以外の同一チームに勝つ場合。このとき,E, F, Gが3敗以上となるのは,下の2通りの場合しかない。

よって,このときの確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot{}_6C_2\cdot 2\cdot{}_4C_1\cdot 2=\frac{15}{2^{17}}$$

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	×	○	○	○	○
B	○	＼	○	○	×	×	×
C	○	×	＼	○	×	×	×
D	×	×	×	＼			
E	×	○	○		＼		
F	×	○	○			＼	
G	×	○	○				＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	○
E	×	＼	○	×
F	×	×	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	○
E	×	＼	×	○
F	×	○	＼	×
G	×	×	○	＼

(d) Bが3勝3敗,Cが2勝4敗のときで,右表のようにB, Cが異なるチームに勝つ場合。このとき,D, E, F Gが3敗以上となるのは,下の4通りの場合しかない。

よって,このときの確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot{}_6C_2\cdot 2\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot 4=\frac{45}{2^{16}}$$

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	×	○	○	○	○
B	○	＼	○	○	×	×	×
C	○	×	＼	×	○	×	×
D	×	×	○	＼			
E	×	○	×		＼		
F	×	○	○			＼	
G	×	○	○				＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	×	○
F	×	○	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	○	×
F	×	×	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	×	○
E	×	＼	○	○
F	○	×	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	×
E	×	＼	○	○
F	×	×	＼	○
G	○	×	×	＼

(e) B が 2 勝 4 敗,C が 3 勝 3 敗のときで,右表のよう場合。このとき,D, E, F, G が 3 敗以上となるのは,下の 4 通りの場合しかない。

よって,このときの確率は

$$\frac{1}{2^{21}}\cdot{}_6C_2\cdot 2\cdot{}_4C_2\cdot 4=\frac{45}{2^{17}}$$

＼	A	B	C	D	E	F	G
A	＼	×	×	○	○	○	○
B	○	＼	○	×	×	×	×
C	○	×	＼	○	○	×	×
D	×	○	×	＼			
E	×	○	×		＼		
F	×	○	○			＼	
G	×	○	○				＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	×	○
F	×	○	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	×	○	○
E	○	＼	○	×
F	×	×	＼	○
G	×	○	×	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	×	○
E	×	＼	○	○
F	○	×	＼	×
G	×	×	○	＼

＼	D	E	F	G
D	＼	○	○	×
E	×	＼	○	○
F	×	×	＼	○
G	○	×	×	＼

故に,求める確率は

$$\frac{1}{64}+\frac{105}{4096}+\frac{195}{8192}+\frac{45}{4096}+\frac{33}{16384}+\frac{45}{2^{15}}+\frac{315}{2^{17}}+\frac{15}{2^{17}}+\frac{45}{2^{16}}+\frac{45}{2^{17}}$$

$$=\frac{10877}{131072}$$

$n\geqq 8$ の場合は,気力がなくなりました。皆さんの頑張りに期待します。