第５問

n チーム（ただし，$n \geqq 3$）のリーグ戦（総当たり戦）で，特定のチームが単独優勝する確率を考える．各チームは他のチームと１試合ずつ試合をし，他のチームより勝利数の多いチームが単独優勝するものとする．また，チームどうしの勝敗の確率は $\dfrac{1}{2}$ とし，引き分けはないものとする．

(1)　$n=3$ のとき，A，B，C の３チームによるリーグ戦を行う．AとBの対戦でAが勝った（Bが負けた）場合，右のように記入するものとする．このとき，勝敗の結果は全部で８通り考えられる．８通りすべてについて，解答用紙の表に○と×を記入し完成せよ．

	A	B	C
A	＼	○	
B	×	＼	
C			＼

(2)　$n=4$ のとき，A，B，C，D の４チームによるリーグ戦で，Aチームが単独優勝する確率を求めよ．

(3)　(勝利数)－(敗戦数)＝1 であるチームは単独優勝できないことを示せ．

(4)　$n=5$ のとき，A，B，C，D，E の５チームによるリーグ戦で，Aチームが単独優勝する確率を求めよ．

(5)　$n=6$ のとき，A，B，C，D，E，F の６チームによるリーグ戦で，Aチームが単独優勝する確率を求めよ．

第５問

着眼点

n チームのリーグ戦における全試合数は，${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ だけある．各試合につき勝利数と敗戦数が１つずつつくから，全勝利数と全敗戦数は同数で，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ である．

また，単独優勝するためには，(勝利数)－(敗戦数)$\geqq 2$ であることが必要で，敗戦数が他のチームの敗戦数より少ないことに注目すると考えやすい．

$n \geqq 7$ のときは細心の注意を払わないとならないのだから，一般的に処理することは大変であろう．

解答例

(1)

	A	B	C
A	＼	○	○
B	×	＼	○
C	×	×	＼

	A	B	C
A	＼	○	○
B	×	＼	×
C	×	○	＼

	A	B	C
A	＼	×	○
B	○	＼	○
C	×	×	＼

	A	B	C
A	＼	×	×
B	○	＼	○
C	○	×	＼

	A	B	C
A	＼	○	×
B	×	＼	×
C	○	○	＼

	A	B	C
A	＼	×	×
B	○	＼	×
C	○	○	＼

	A	B	C
A	＼	○	×
B	×	＼	○
C	○	×	＼

	A	B	C
A	＼	×	○
B	○	＼	×
C	×	○	＼

(2)　$n=4$ のとき，全試合数は ${}_4\mathrm{C}_2=6$ となる．

A の勝敗にしたがって場合分けを行う．

（i）３勝０敗のとき

他のチームは１敗以上するから，A の単独優勝である．

よって，確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

	A	B	C	D
A	＼	○	○	○
B	×	＼		
C	×		＼	
D	×			＼

（ii）２勝１敗のとき

他の３チームの総勝利数は４，総敗戦数は５であるが，敗戦数が１以下のチームが必ず存在するから，A の単独優勝はない．

	A	B	C	D
A	＼	×	○	○
B	○	＼		
C	×		＼	
D	×			＼

よって，(i)(ii)より，A が単独優勝する確率は $\dfrac{1}{8}$

(3)　あるチームが (勝利数)－(敗戦数)＝1 である場合，(敗戦数)＝k（$k\geqq1$）とおくと，$n-1=(k+1)+k$ より，チーム数は $n=2k+2$ である．もし，このチームが単独優勝するならば，他のチームの敗戦数の総計は $(k+1)(n-1)=(k+1)(2k+1)$ 以上となる．

すなわち，${}_n\mathrm{C}_2={}_{2k+2}\mathrm{C}_2\geqq k+(k+1)(2k+1)$ でなければならない．しかし，左辺は $(k+1)(2k+1)$ であるから不可能である．

ゆえに，このチームが単独優勝することはない．

(4)　$n=5$ のとき，全試合数は ${}_5\mathrm{C}_2=10$ となる．A の勝敗にしたがって場合分けを行う．

（i）４勝０敗のとき

他のチームは１敗以上するから，A の単独優勝である．

よって，確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

	A	B	C	D	E
A	＼	○	○	○	○
B	×	＼			
C	×		＼		
D	×			＼	
E	×				＼

（ii）３勝１敗のとき

他の４チームの総勝利数は７，総敗戦

数は9である．例えば，A が B に敗れた場合（右図），A が単独優勝するためには次の2通りが考えられる．

（a）B が2勝2敗のとき

B が C に勝ったとすると，残り D，E が3勝しなければよいから，場合の数は $2^3-2\cdot2$（通り）

	A	B	C	D	E
A	＼	×	○	○	○
B	○	＼	○	×	×
C	×	×	＼		
D	×	○		＼	
E	×	○			＼

（b）B が1勝3敗のとき

B が C，D，E に敗れた場合だから，場合の数は $2^3-3\cdot2$（通り）

	A	B	C	D	E
A	＼	×	○	○	○
B	○	＼	×	×	×
C	×	○	＼		
D	×	○		＼	
E	×	○			＼

よって，求める確率は

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{10}}\{4\cdot3\cdot(2^3-2\cdot2)+4\cdot(2^3-3\cdot2)\}=\frac{15}{128}$$

(5)　$n=6$ のとき，全試合数は ${}_6C_2=15$ となる．A の勝敗にしたがって場合分けを行う．

（i）5勝0敗のとき

他のチームは1敗以上するから，A の単独優勝である．

よって，確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

	A	B	C	D	E	F
A	＼	○	○	○	○	○
B	×	＼				
C	×		＼			
D	×			＼		
E	×				＼	
F	×					＼

（ii）4勝1敗のとき

例えば，A が B に敗れた場合，B チームの勝敗にしたがって，場合に分ける．

（a）3勝2敗のとき

B が敗れるチームの選び方が ${}_4C_2$（通り）．

右表の場合なら，E，F が残りを全勝しなければよいから，場合の数は

$2^6-2\cdot2^3$（通り）．

よって，この場合の確率は

$$\frac{1}{2^{15}}\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_2\cdot(2^6-2\cdot2^3)=\frac{45}{1024}$$

	A	B	C	D	E	F
A	＼	×	○	○	○	○
B	○	＼	○	○	×	×
C	×	×	＼			
D	×	×		＼		
E	×	○			＼	
F	×	○				＼

（b）２勝３敗のとき

Ｂが敗れる３チームの選び方が ${}_4C_3$（通り）．

右表の場合なら，D，E，Ｆの３チームが残りを全勝しなければよいから，その場合の数は

$2^6-3\cdot2^3$（通り）．

よって，この場合の確率は

$$\frac{1}{2^{15}}\cdot{}_5C_1\cdot{}_4C_3\cdot(2^6-3\cdot2^3)=\frac{25}{1024}$$

	A	B	C	D	E	F
A	＼	×	○	○	○	○
B	○	＼	○	×	×	×
C	×	×	＼			
D	×	○		＼		
E	×	○			＼	
F	×	○				＼

（c）１勝４敗のとき

右表から，場合の数は

$2^6-4\cdot2^3$（通り）．

よって，この場合の確率は

$$\frac{1}{2^{15}}\cdot{}_5C_1\cdot(2^6-4\cdot2^3)=\frac{5}{1024}$$

	A	B	C	D	E	F
A	＼	×	○	○	○	○
B	○	＼	×	×	×	×
C	×	○	＼			
D	×	○		＼		
E	×	○			＼	
F	×	○				＼

ゆえに，求める確率は $\frac{1}{32}+\frac{45}{1024}+\frac{25}{1024}+\frac{5}{1024}=\frac{107}{1024}$