第４問

$\boxed{\text{配点}}$(1)13 点　　　(2)6 点　　　(3)10 点　　　　(4)11 点

(1)については成り立つか成り立たないかを 5×5＝25 通りの全ての場合について書いているかどうか（理由は不要）で判断しています。(2)(3)(4)については成り立つ，成り立たない理由の説明のないものは減点しました。特に(3)(4)については成り立たない場合の例をきちんと書いているかどうかを重視しています。

$\boxed{\text{講評}}$

この問題は，「解答と解説」にも書いたように集合と演算，同値関係に関する問題です。高校の教科書ではこのような分野の問題はほとんど取り扱われず，見慣れないため一見難しそうに見えますが中身は平易であり中学生でも十分理解できるものだと思います。この問題については 40 点満点者も 20 名以上いましたし，順番にやっていけば比較的やりやすい問題ではなかったかと思っています。

問題の話に行く前にまず論証の基本事項を確認しておきたいと思います。ある命題「ＡならばＢである」の否定は何でしょうか。「ＡならばＢでない」？　例えば「鳥は空を飛ぶ」の否定は「鳥は空を飛ばない」でいいのでしょうか。

実は「ＡはＢである」の否定は「ＡはＢでない」ではありません。「ＡであってＢでないものが存在する」です。集合を用いて表せば条件Ａを満たすものの集合をＸ，条件Ｂを満たすものの集合をＹとしたとき「全てのＸの要素はＹの要素である」が「ＡならばＢである」と同じ意味ですから「Ｘの要素の中に一つでもＹの要素でないものがある」ならば「ＡならばＢ」は成り立ちません。

先ほどの例でいえば「鳥は空を飛ぶ」の否定は「鳥の中には空を飛ばないものもいる」です。実際鳥の中にはダチョウやペンギンのように空を飛ばない種類もあります。日常言語のあいまいさを避けるとすれば「ＡならばＢである」という文を「条件Ａを満たすものは全て条件Ｂも満たしている」といいなおしたほうがいいのかもしれません。なぜこのようなことを書いたかというと今回の採点中に命題が正しいことを示そうとして「このような場合成り立つのでこの命題は成り立つ」としたような説明をしていた人が随分いました。さきほどの例でいうと「カラスは空を飛ぶ」だから「鳥は空を飛ぶ」というような論法です。一部の場合で成り立つからといって全部で成り立つとは限りません。但し成り立たないことを説明するときは一部でも（一つでも）成り立たないものがあることを示せばいいのです。これを「反例をあげる」といいます。論証問題のポイントは成り立つ場合の説明ができるか，成り立たないことの説明として反例をしっかり探せるかです。

さて今回の問題の趣旨は数学のいろいろな分野で使われる同値関係という考え方を理解してもらいたいということで出題しました。問題文の中の３つの性質は順に反射律，対称律，推移律と名づけられています。この 3 つの性質をすべて満たすような関係によって要素を分類してできた集合を同値類といいます。たとえば自然数全体は偶数と奇数の 2 種類の要素の集合に分かれます。これは問題中にも出てくるので予想がつくと思いますが，二つの数の差が 2 の倍数であるかどうかで関係を定めると性質①②③をすべて満たしています。このような分類は集合の要素を「きれいに」分割できるということが重要なポイントです。それではこれらの性質はなぜ必要なのか，どれか一つでも欠けていたらどうなるかを考えて作られたのがこの問題です。実は数学コンテストの第 3 回にも類題が出ています。昨年研究部で作成して道内各高校に送っている冊子「北海道高等学校数学コンテスト 20 年の記録」にも載っていますのでよかったら参考にしてください。

さて(1)ですが，これは関係の考え方に慣れてもらうために 2 つの要素同士の関係をすべて調べてもらおうとして出題しました。表にすると下の形です。

$x \sim y$ が成り立つか

～	x ＝1	2	3	4	5
y ＝1	○	×	○	×	○
2	×	○	×	○	×
3	○	×	○	×	○
4	×	○	×	○	×
5	○	×	○	×	○

○は成り立つ，×は成り立たない

問題文にどちらが成り立つかを「記せ」としたのは結果だけでよいという意図です。全部で５×５＝25 通り調べてもらえばいいのです。一つ一つ調べた人も，表にしてまとめていた人もいましたがどちらでもかまいません。一部に「１と１」や「２と２」などのような同じものの間の関係を抜かしていた人もいましたが，その分は減点してあります。また「1 と２」「１と３」・・・のように $x<y$ の場合だけ書いていた人もいましたが一般には $x \sim y$ だからといって $y \sim x$ が成り立つとは限らないのできちんとした説明がない人はその分減点しています。成り立つのは 13 個で，成り立たないのが 12 個になります。

(2)からはそれぞれ与えられた関係について性質①②③が成り立つかどうかの問題です。問題文に成り立つかどうかを「調べよ」としたのは理由も説明してほしいという意図です。成り立つ場合全部を調べて示すのは大変なので文や記号での説明をしたほう

がいいでしょうし，成り立たない場合の反例をあげてもらえばＯＫです。⑵は①②③がすべて成り立つ例なのですが，①や②は成り立たないとした人が結構いました。一般に $x-x=0$ で 0 は 2 の倍数（0＝2・0）ですが０を除いたために①が成り立たないとした人や，整数には負の場合もあるのに不適とした人などです。また $x-y=2n$ とするとき $y-x=2n$ などとしていた人もいましたが，これはもちろん $y-x=-2n$ としなければなりません。

⑶において①は成り立っていません。性質①はすべての x に対して $x \sim x$ すなわち $x^2>0$ が成り立っているかということですから $x=0$ のときは成り立たない（反例）。ですから成り立ちません。間違っていた答案に次のようなものがありました。

（誤答の例）「$x \sim x$ が成り立っているならば $x^2>0$ すなわち $x=0$ は除かれる，よって①成立」

よく考えたら $x \sim x$ が成り立つのは x が 0 でないときですからこの説明は「成り立っているから成り立つ」というトートロジーになってしまい，証明にはなりません。②の説明も苦しんでいる人が多かったのですが，単純に $xy=yx$ より成り立つでＯＫです。③の場合 $xy>0$ かつ $yz>0$ ならば $xz>0$ を示せば終了です。この場合は $xy>0$, $yz>0$ より x，y，z はともに０でないことに注意すればよいでしょう。

⑷においては①は成り立ちます（すべての x に対して $x^2 \geq 0$）。問題は③です。これの反例を見つけるのは難しくないと思います。$xy \geqq 0$ かつ $yz \geqq 0$ ならば $xz \geqq 0$。これは $x>0$，$y=0$，$z<0$ の場合が反例となります。

第４問の考え方は進んだ数学を学んだときに必要不可欠なものです。「解答と解説」で紹介した遠山啓さんの「無限と連続」（岩波新書）なども読んでみてください。

北海道札幌開成高等学校　佐々木光憲