第４問

一般に集合の２つの要素 x，y（$x=y$ であってもよい）の間に，ある「関係」が成り立つときは $x \sim y$ と表し，この「関係」が成り立たないときは x・y と表す．したがって，x と y については，$x \sim y$ か x・y のいずれかが成り立つ．

例えば，集合 $T=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ とするとき，T の要素 x，y において「x が y の倍数である（$x=yn$ を満たす整数 n が存在する）」ということを $x \sim y$ であると表すと，6 は 2 の倍数であるので $6 \sim 2$ であるが，5 は 2 の倍数ではないので 5・2 となる．また，2 は 6 の倍数ではないので 2・6 であるが，2 は 2 の倍数であるので，$2 \sim 2$ である．

このように，集合の２つの要素について，定められた関係が成り立つか成り立たないかを調べることができる．

(1)　集合 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ とする．U の要素 x，y に対して，$x-y=2n$ を満たす整数 n が存在するとき，$x \sim y$ であると定める．U の２つの要素 x，y すべての場合について，$x \sim y$，x・y のどちらが成り立つかを記せ．

次に，集合 $M=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ とする．集合 M の要素 x，y，z に対して，(2)(3)(4)に示された「関係」が成り立つとき $x \sim y$ と表す．このとき，関係「$\sim$」が次の性質をもつかどうかを，①②③それぞれについて調べよ．

性質①　M のすべての要素 x について　　$x \sim x$

性質②　$x \sim y$ ならば　　$y \sim x$

性質③　$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば　　$x \sim z$

(2)　「$x-y=2n$ を満たす整数 n が存在する」とき，$x \sim y$ であるとすると，性質①②③をもつかどうかをそれぞれについて調べよ．

(3)　「$xy>0$ が成り立つ」とき，$x \sim y$ であるとすると，性質①②③をもつかどうかをそれぞれについて調べよ．

(4)　「$xy \geqq 0$ が成り立つ」とき，$x \sim y$ であるとすると，性質①②③をもつかどうかをそれぞれについて調べよ．

第４問

着眼点

集合の要素を分類するときに用いる，同値類という考え方を出題しました．問題文の３つの性質は順に，①が反射律，②が対称律，③が推移律と名付けられ，これらの性質すべてをもつときに，この関係を同値関係といいます．

例えば，すべての正の整数からなる集合 M の要素 x，y について，x，y を 3 で割った余りが等しいとき，$x \sim y$ と表すことにします．このとき，M は，$x \sim 1$ となる x の集合は M_1 に，$x \sim 2$ となる x の集合は M_2 に，$x \sim 3$ となる x の集合は M_0 に分類でき，それらを同値類といいます．M_0，M_1，M_2 の要素どうしの関係について性質①②③すべてをもっています．この①②③の性質はどれか１つが抜けてもいけません．

このような集合の要素の分類は数学の各分野で用いられる重要な事項なのですが，高校

の教科書では扱っていません．この機会に考えてみてください．参考図書としては，遠山啓著「無限と連続」（岩波新書）を薦めます．

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)　$0\sim0$，$0・1$，$0\sim2$，$0・3$，$0\sim4$，$1・0$，$1\sim1$，$1・2$，$1\sim3$，$1・4$
$2\sim0$，$2・1$，$2\sim2$，$2・3$，$2\sim4$，$3・0$，$3\sim1$，$3・2$，$3\sim3$，$3・4$
$4\sim0$，$4・1$，$4\sim2$，$4・3$，$4\sim4$

(2)　①について，$x-x=0=2\times0$ より，M のすべての要素について $x\sim x$ は成り立つので，性質①をもつ．

②について，$x-y=2n$ より $y-x=2\times(-n)$
n が整数ならば $-n$ も整数なので，$x\sim y$ ならば $y\sim x$
よって，性質②をもつ．

③について，$x-y=2n'$ かつ $y-z=2n''$ より $x-z=(x-y)+(y-z)=2(n'+n'')$
n'，n'' が整数ならば $n'+n''$ も整数なので，
$x\sim y$ かつ $y\sim z$ ならば $x\sim z$
よって，性質③をもつ．

(3)　①について，$x=0$ とすると，$0\cdot0=0$ より，$0\cdot0>0$ が成り立たないので，$0・0$
よって，性質①をもたない．

②について，$xy>0$ より $yx>0$　したがって，$x\sim y$ ならば $y\sim x$
よって，性質②をもつ．

③について，$xy>0$ かつ $yz>0$ より $xy\cdot yz=xy^2z>0$
$y\fallingdotseq0$ であるから，$y^2>0$　したがって，$xz>0$ なので
$x\sim y$ かつ $y\sim z$ ならば $x\sim z$
よって，性質③をもつ．

(4)　①について，$x\in M$ であれば，つねに $x\cdot x=x^2\geqq0$ が成り立つ
よって，性質①をもつ．

②について，$xy\geqq0$ より $yx\geqq0$　したがって，$x\sim y$ ならば $y\sim x$
よって，性質②をもつ．

③について，$x=1$，$y=0$，$z=-1$ とすると，
$1\cdot0=0\geqq0$ かつ $0\cdot(-1)=0\geqq0$ であるから，$1\sim0$ かつ $0\sim(-1)$
しかし，$1\cdot(-1)=-1<0$ であるから，$1・(-1)$
よって，性質③をもたない．