問題３

配点　⑴５点　⑵１０点　⑶１０点　⑷５点　⑸１０点

講評

⑴ 正答率は 65%と出題者の予想に反して低調でした。操作を始める任意の数によって，固定される数 495 に到達する操作回数は変わりますが，最大６回の操作で 495 に到達するようです。

⑵ 正答率は 25%でした。解答例とは別に，操作後の数の十の位が９，百位と一位の和が９になることが論証されている解答もありました。ただ，論証の曖昧なもの，言葉だけでの説明(…繰り下がって…など)で，要点のつかめないものもあったのは残念です。文字をしっかり使えればと感じました。

⑶ 正答率は 15%でした。ここでは解答例とは別に，以下のような解答が多数ありました。

【⑵より３桁のすべての数は１回の操作で, (9,9,0),(9,8,1),(9,7,2),(9,6,3),(9,5,4)で作られる３桁の数になるので，変化しない数は，この組み合わせの数だけを考えればよい。

この組み合わせの数をさらに操作すると，(9,9,0)→891,(9,8,1)→792,(9,7,2)→693,(9,6,3)→594,(9,5,4)→495 となるので, 変化しないのは(9,5,4)→495 のみである。すなわち，同じ数になるのは 495 のみである。】

こちらの解答例よりシンプルで，すばらしい解答です。

⑷ 正答率は 51%でした。⑴と同様な問題なのですが，⑵,⑶の後ということで，記入されている答案が少なかったようです。

⑸ 正答率は 8%でした。a と d ，b と c の関係まで出せたのですが，$a=9$ のあと，$b=8$ と $a\neq b$ と勘違いしてしまった受験生もいました。残念！

全受験生中，立命館慶祥中の尾野亜裕美さんが満点，札幌北高校の田中大資君，室蘭栄高校の中濱良祐君も好成績を残しました。全受験者の平均は 12.09 点でした。

今回は出題しませんでしたが，４桁の数が 6174 となるのはどのように示すかというと，出題の⑵と同様におこないます。概要は以下の通りです。

【４桁の各位の数を a ，b ，c ，d （$9\geqq a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq 0$ ，$a\neq d$ ）とすると，最大数と最小数の差は,

$$(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c)$$

となる。ここで，$a-d=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ，$b-c=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ より，

9×10＝90(通り)の場合について調べるとよい。このとき４つの数の組み合わせが異なるのは 30 通りである。】

コンテストに出題するには厳しすぎますね。

着眼点に書きましたが，他の桁での数のカプレカー操作はどのようになるのでしょうか,

＜２桁の場合＞　09→81→63→27→45→09→　とループする。

＜５桁の場合＞　２桁の場合と同様にループします。ただし，３通りあります。

北海道札幌琴似工業高等学校　中居基昭