第３問

3 桁の正の整数（ただし，333 のように各位の数がすべて同じものを除く）を並べ替え，最大の数と最小の数をつくり（0 があれば最小の数は 2 桁以下とする），その差（正の数）を求める「操作」をする．

例えば，123 の場合は $321-123=198$ となり，100 の場合は $100-001=99$ となる．

この「操作」を繰り返し行うとある数に固定され，その後同じ数を繰り返す．なお，差が 2 桁になった場合には，百の位に 0 を補って次の「操作」を行う．上の例（100の場合）においては，$100-001=99$ の次は，99 を 099 と考え，$990-099=891$ となる．

(1)　固定される数を見つけよ．

(2)　このことを確認するには，(9，9，0)，(9，8，1)，(9，7，2)，(9，6，3)，(9，5，4)で作られる 3 桁の数の時だけを調べればよい．その理由を説明せよ．

(3)　3 桁の数で，この「操作」をすると同じ数になるのは(1)の数だけである．その理由を説明せよ．

上記の「操作」を 4 桁の正の整数（各位の数がすべて同じものを除く）で行うと，3 桁の場合と同様にある数に固定され，その後同じ数を繰り返す．

(4)　固定される数を見つけよ．

(5)　１回の操作で(4)の数になる 4 桁の正の整数のうち，最大のものを求めよ．

第３問

着眼点

問題で出題した「操作」のことをカプレカー操作といいます．カプレカーはインドの数学者で，4 桁の整数の場合 6174 に固定されることを1949年に発表しました．

問題では 4 桁の場合の確認を出題しませんでしたが，3 桁の場合と同様に確認することができます．ただし，30個も確認しなければなりません．また，2 桁，5 桁の場合はどうなるのでしょうか．

解答例

(1)　495

(2)　3 桁の整数を，$(a,\ b,\ c)$ からなる数（ただし，$9 \geqq a \geqq b \geqq c \geqq 0$，$a \fallingdotseq c$）とすると，最大数と最小数の差は

$$(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99(a-c)$$

となる．$9 \geqq a-c \geqq 1$ より，この「操作」を行ってできる数は，

$$99\times 9,\ 99\times 8,\ 99\times 7,\ \cdots\cdots,\ 99\times 1$$

すなわち，891，792，693，594，495，396，297，198，99 となるので，このとき，３つの数の組み合わせが異なるものが，(9，9，0)，(9，8，1)，(9，7，2)，(9，6，3)，(9，5，4) であるので，この組み合わせの数を確認するとよい．

(3)　3 桁の整数を，$(a,\ b,\ c)$ からなる数（ただし，$9 \geqq a \geqq b \geqq c \geqq 0$，$a \fallingdotseq c$）とすると，最大数と最小数の差は

$$(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99(a-c)=100(a-c-1)+90+(10+c-a)$$

となる．$9 \geqq a-c \geqq 1$ より，この差の百の位の数は $a-c-1$，十の位の数は 9，一の位の数は $10+c-a$ である．

$b=9$ と仮定すると，$a \geqq b$ より $a=9$．

このとき，a を百の位の数とすると，$a-c-1=a$ より $c=-1$ となって $c \geqq 0$ に反する．また，a を一の位の数とすると，$10+c-a=a$ より $c=8$ となる．しかし，この場合，c が百の位の数となり，$a-c-1=c$ より $c=4$．これは，$c=8$ に反することから，$b \fallingdotseq 9$．

$9 \geqq a \geqq b \geqq c$ と $a \fallingdotseq c$ から，$c \leqq 8$ なので，$c \fallingdotseq 9$．したがって，$a=9$．

よって，「操作」後の数は，$100(8-c)+90+(1+c)$ となる．ここで，$1+c \fallingdotseq c$ より c は一の位の数にはならないので，c は百の位の数，b は一の位の数となる．このとき，$8-c=c$，$1+c=b$ より，$c=4$，$b=5$．

ゆえに，495 となる．

(4)　6174

(5)　4 桁の整数を，$(a,\ b,\ c,\ d)$ からなる数（ただし，$9 \geqq a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$，$a \fallingdotseq d$）とすると，最大数と最小数の差は

$$(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c)$$

となる．$6174=999 \times 6+90 \times 2$ より，$a-d=6$，$b-c=2$ とすると，１回の「操作」で 6174 となる．

$a-d=6$，$b-c=2$ を満たす整数 a，b，c，d のうち，$1000a+100b+10c+d$ が最大となるものは，$a=9$，$b=9$，$c=7$，$d=3$．よって，求める整数は 9973．