

第2問

配点 (1)4点 (2)作図4点証明6点 (3)6点 (4)6点 (5)4点 (6)4点 (7)6点

講評

中学数学や数学Aで学ぶ、こういった図形の問題は「平面幾何」といいます。10年ほど前までは、高校の教科書には「平面幾何」はなく、図形といえば「三角比」や「ベクトル」、「平面図形と式」でした。10年ほど前、数学Aに「平面幾何」があらわれたときは「選択」という形だったため、学ばない高校生も多数いました。そして、現在の高校2年からは数学Aで全員が学ぶことになりました。「平面幾何」は他の分野のように決まった解き方や公式があまり多いわけではなく、ときには補助線を引いたり、平行移動や回転移動、対称移動を用いるなど、発想する力が求められます。

今回、採点して感じたことは、実に様々な着想で、証明に取り組んでくれた生徒が多かったことです。「解答と解説」には一例のみ示しましたが、「こういった形でも証明できるなあ」と考えさせられる答案用紙もたくさんありました。中には、解答例よりもスマートな証明を示してくれた生徒もおり、今後の飛躍に期待をもちました。ただ、欲をいえば、証明についてだけではありませんが、コンテストに参加するような皆さんには、一つの解き方で満足するのではなく、他に解き方はないか、という視点で問題に取り組み、よりエレガントな解答をしてもらいたいということです。字の大きさにもよりますが、この第2問は解答用紙の裏まで使わなくても解き終えられる問題だと思います。解答用紙を裏まで使った生徒は、これからは回り道や無駄を省き、引き締まった答案を作成するよう心がけてください。

さて、採点していて感じたことを列挙します。

1. 答案を作成するときは、人に読まれることを意識して書くこと。

急いでいるためか、かなり雑な印象を受ける答案も多々ありました。また、途中で書き足したりしたために、どこからどこへ続いていくのか、見失ってしまうような解答もありました。今後、気をつけてください。

2. 合同の証明は、左辺と右辺を対応させて、対応する頂点の順に書くこと。

例えば、(2)の証明で、「 $\triangle ABC$ と $\triangle EAI$ において」で書き始めているのに、すぐ次の行では、「 $EA=AB$ 」と書いてある、といった答案がかなりありました。前者後者を対応させるという意味では、「 $AB=EA$ 」と記すべきですね。また、「 $AB=AE$ 」と書いてある答案も相当数ありました。 AB や AE が線分の長さを表すとすれば、 AE だろうが EA だろうが等しい長さになりますが、対応する頂点という意味では、 $\triangle ABC$ の頂点Aに対応するのは、 $\triangle EAI$ では頂点Eです。したがって、 EA と書くことが望ましいのです。これらは(2)だけでなく、他の設問でも見られました。採点では、長さが等しいことを述べているのだと善意に解釈して、減点はしていません。

3. 安易に言葉に頼らない。

あまり多くはありませんが、「仮定より」や「同様に」という言葉を乱発している答案もありました。文字通り、仮定に示されていたり、同じ手順を踏んで示せるのであれば問題はありますが、仮定から直接導けない(論述や証明が必要になる)場合や、異なる手順を踏む必要があるときには減点しました。すべてを漏らさず、教科書どおり一字一句記す必要はありませんが、省略しすぎる(飛躍しすぎる)のも問題ありです。

4. 図を有効に活用する。

今回、作図が指示されているのは(1)と(2)だけです。したがって、与えられた三角形に2つの正方形と1つの平行四辺形が付け加えられていればよいのですが、それだけで作図が終わっている答案が多く見られました。(3)以降でも、IA を延長したり、BI や CD を結んだり、その交点を K としたりなど、問題を解く上で必要な線分や点がまだまだあるのに、書き込まれていない図がありました。必要な線分や点は図に書き込むことで、採点者が読みやすくなります。特に、問題で与えられていない補助線を付加するときには不可欠です。ぜひ図を有効に活用してください。

ただし、有効に活用することを拡大解釈し、(7)で、「図のようになるので、IJ が BF と CD の交点を通る」と記された答案も見られました。これは、よくありません。図を描いてみると通ることが予想されるので、きちんと証明するわけですから。

5. 定理が使える条件を正しく理解すること。

例えば、(5)は「円周角の定理の逆」を用いれば証明できるのですが、本来は、2点 K, J からみて、他の2点 I, C が同じ側にないと、「円周角の定理 (及びその逆)」は成り立ちません。減点はしませんでした。気をつけてください。

また、(2)や(4)の証明 (三角形の合同) で、示した3つの等式が「2辺とその間の角」になっていないものもありました。これでは、合同を示せません。きちんと確認しましょう。

6. 結論から出発しない。

答案の中には、証明すべき結論が成り立つことを仮定して、仮定と結論が食い違わないことで、証明を示したと錯覚している答案が見られました。例えば、(5)であれば「4点 I, K, J, C が同一円周上にあるとすると・・・が成り立つので、4点は同一円周上にある」、(7)であれば「IJ, BF, CD が1点で交わると仮定すると、それは垂心だから・・・」といった答案です。せめて背理法を用いようというのであれば別ですが、結論を仮定することは明らかに間違いです。以後、注意してください。

7. 設問(6)について。

基本的には、前問の結果を用いるときは、それがきちんと導かれていないといけません。(6)を解くときに、(5)の結果 (4点が同一円周上にある) を用いるのであれば、(5)をきちんと証明していなければ、それが成り立つとはいえません。しかし、採点時には、そういった答案にも得点を与えました。なお、(5)を利用しなくても(6)が解けることを示した生徒が数名いました。出題者としては、(5)を利用することを前提にしていたのですが、正しい筋道で導いているものについては得点を与えています。方法としては、 $\triangle PBD$ の $\triangle PKB$ を示して、 $\angle PKB = \angle PBD = 90^\circ$ を導く、などがあります。また、264番矢元君のように、回転移動の考え方を用いて正解の 90° を導き出す方法もあります。

出題者としては、図形が苦手な生徒が多いのではないかと思い、設問を小分けにして出題したのですが、どうもそれは杞憂に終わってしまいました。もっと大雑把な設問にして、皆さんの発想に期待すればよかったと反省しています。

北海道札幌白石高等学校 平間順宏