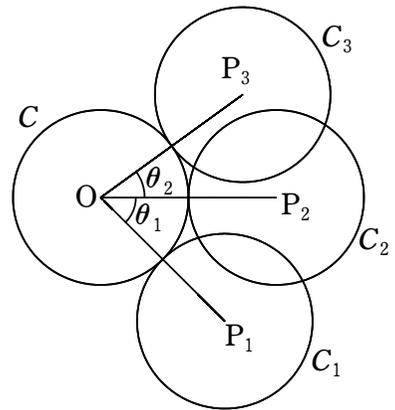


第 1 問

半径 1 の円 C, C_1, C_2, \dots, C_n がある . いま , 円 C に
外接するように n 個の円 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ を左回りに
順に重なるように描いていく . ただし , 各円 C_k
($k=1, 2, 3, \dots, n$) は , 互いに他の円の中心を含まない
ように , かつ , 互いに中心を通過しないように描いていく .
次の問いに答えよ .

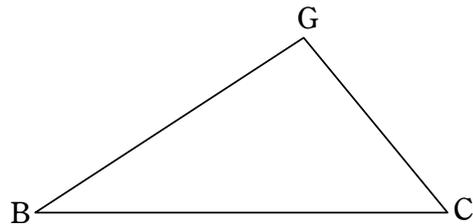
- (1) 円 C の中心を O , 円 C_k の中心を P_k とし , $\angle P_k O P_{k+1} = \theta_k$
とすると , $P_k P_{k+1}$ の 長さを θ_k で表せ .
- (2) $\cos \theta_k$ の値の範囲を求めよ .
- (3) n の最大値を求めよ . 必要ならば , $\cos 28^\circ > 0.88$ を用いて
よい .



第 2 問 「 ABC のそれぞれの内角の 3 等分線の交点のうち，辺に近い 3 点を結んでできる三角形は正三角形である（モーレーの定理）」

この定理は，どのような三角形についても成立すること，様々な証明方法が可能なことでもよく知られています．ただし，一般の角について定規とコンパスだけを用いて角の三等分線を作図することは不可能であるので，図を描くにも工夫が必要です．次のように答案用紙に作図しながら，この定理の証明を下さい．

- (1) 答案用紙の BCG について， $\angle B$ ， $\angle C$ の 2 等分線を定規とコンパスを用いて作図し，2 等分線の交点 D を答案用紙の図に描きなさい．
- (2) 線分 GD は $\angle G$ の 2 等分線であることを証明しなさい．
- (3) 線分 BG ， CG に関して点 D と対称な点をそれぞれ M ， N とするとき， M ， N を作図せよ．また，直線 BM と直線 CN の交点 A も作図せよ．
- (4) 線分 BG 上に点 E を，線分 CG 上に点 F をとって， $\angle EDG = \angle FDG = 30^\circ$ となるようにするとき， DEF は正三角形になることを証明しなさい．
- (5) 5 つの点 A ， M ， N ， E ， F は同一円周上にあることを証明しなさい．
- (6) 以上のことを利用して，モーレーの定理が成り立つことを証明しなさい．



第3問 負でない整数からなる集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ を考える.

ただし, $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ であるとする.

- (1) $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ について, $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 8$ かつ $2a_2 = a_1 + a_3$ が成り立っている. A の要素の1つ a_i が4であるとき, A はどんな集合か. すべて求めよ. (解答は結果のみ示せばよい)
- (2) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ において, $a_6 \leq 10$ であるとき, A から3つの要素 a_i, a_j, a_k をどのように選んでも, $2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないという. そのような A を1つ答えよ. (解答は結果のみ示せばよい)
- (3) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は, $n \geq 9$ かつ $a_n \leq 18$ を満たし, A から3つの要素 a_i, a_j, a_k をどのように選んでも, $2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないようにする. このような集合 A は存在しないことを示せ.
- (4) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ において, $a_n = 2004$ である. 集合 A から3つの要素 a_i, a_j, a_k をどのように選んでも, $2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないようにするとき, 集合 A の要素の個数 n すなわち $n(A)$ の最大値を求めよ.
(ヒント: $2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないときの集合 A の要素を10進法以外の表し方で表してみよう)

第4問 A, B 2つの袋があり, Aの袋には赤球3個, 白球3個の計6個, Bの袋には赤球3個, 白球5個の計8個が入っている. いま, 次の試行の順で実行する,
試行1: Aの袋の中をよくかき混ぜて, 2個の球を取り出し, Bの袋の中に入れる.
試行2: Bの袋の中をよくかき混ぜて, 2個の球を取り出し, Aの袋の中に入れる.
試行3: Aの袋の中をよくかき混ぜて, 2個の球を取り出す.

以下の問いに答えよ.

- (1) 試行1において, 取り出された2個の球が赤球1個, 白球1個となる確率を求めよ.
- (2) 試行1のあと, 試行2において取り出された2個の球が, 赤球1個, 白球1個となる確率を求めよ.
- (3) 試行1および試行2のあと, 試行3において取り出された2個の球が, 赤球1個, 白球1個となる確率を求めよ.
- (4) 試行1および試行2のあと, 試行3において取り出された2個の球における赤球の個数の期待値を求めよ.

第5問 正の実数 x, y について定義された関数 $f(x, y)$ が、次の性質を満たしている。

(性質1) $f(1, 1) = 1$

(性質2) $f(y, x) = f(x, y)$

(性質3) $f(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \cdot f(x, y)$

以下の問いに答えよ

(1) $f(2, 1)$ の値を求めよ。

(2) $f(3, 2)$ の値を求めよ。

(3) 自然数 m に対して、 $f(m, 1) = \frac{1}{m}$ であることを示せ。

(4) 自然数 m, n に対して、 $f(m, n) = \frac{(m-1)! \cdot (n-1)!}{(m+n-1)!}$ であることを示せ。

ただし、 $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ 、 $0! = 1$ とする。

(5) (3)の事実から、正の実数 x に対して、 $f(x, 1) = \frac{1}{x}$ と定めることとする。

そのとき、自然数 n に対して、 $f(x, n) = \frac{(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x}$ であることを示せ。