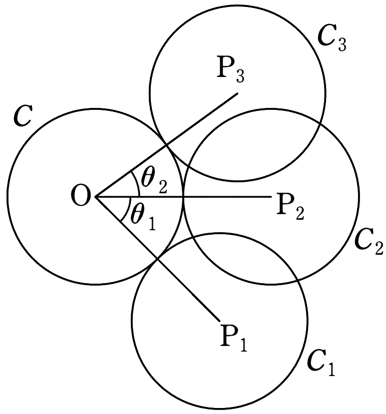
第１問

半径１の円 C，C_1，C_2，…，C_n がある．いま，円 C に外接するように n 個の円 C_1，C_2，C_3，…，C_n を左回りに順に重なるように描いていく．ただし，各円 C_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ は，互いに他の円の中心を含まないように，かつ，互いに中心を通過しないように描いていく．
次の問いに答えよ．

⑴　円 C の中心を O，円 C_k の中心を P_k とし，$\angle \mathrm{P}_k\mathrm{O}\mathrm{P}_{k+1}=\theta_k$ とするとき，$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の　長さを θ_k で表せ．

⑵　$\cos\theta_k$ の値の範囲を求めよ．

⑶　n の最大値を求めよ．必要ならば，$\cos 28^\circ > 0.88$ を用いてよい．



第２問　「△ABC のそれぞれの内角の３等分線の交点のうち，辺に近い３点を結んでできる三角形は正三角形である（モーレーの定理）」

この定理は，どのような三角形についても成立すること，様々な証明方法が可能なことでもよく知られています．ただし，一般の角について定規とコンパスだけを用いて角の三等分線を作図することは不可能であるので，図を描くにも工夫が必要です．次のように答案用紙に作図しながら，この定理の証明をしなさい．

⑴　答案用紙の △BCG について，∠B，∠C の２等分線を定規とコンパスを用いて作図し，２等分線の交点 D を答案用紙の図に描きなさい．

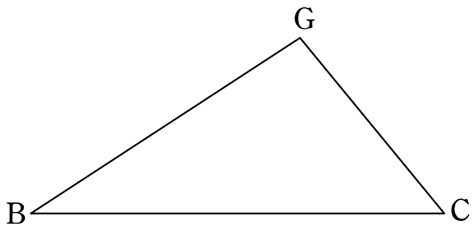
⑵　線分 GD は ∠G の２等分線であることを証明しなさい．

⑶　線分 BG，CG に関して点 D と対称な点をそれぞれ M，N とするとき，M，N を作図せよ．また，直線 BM と直線 CN の交点 A も作図せよ．

⑷　線分 BG 上に点 E を，線分 CG 上に点 F をとって，$\angle EDG = \angle FDG = 30^\circ$ となるようにするとき，△DEF は正三角形になることを証明しなさい．

⑸　５つの点 A，M，N，E，F は同一円周上にあることを証明しなさい．

⑹　以上のことを利用して，モーレーの定理が成り立つことを証明しなさい．



第３問　負でない整数からなる集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ を考える．

ただし，$0 \leqq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots\cdots < a_n$ であるとする．

(1)　$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ について，$0 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 8$ かつ $2a_2 = a_1 + a_3$ が成り立っている．A の要素の１つ a_i が 4 であるとき，A はどんな集合か．すべて求めよ．（解答は結果のみ示せばよい）

(2)　$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_6\}$ において，$a_6 \leqq 10$ であるとき，A から３つの要素 $a_i,\ a_j,\ a_k$ をどのように選んでも，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないという．そのような A を１つ答えよ．（解答は結果のみ示せばよい）

(3)　$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ は，$n \geqq 9$ かつ $a_n \leqq 18$ を満たし，A から３つの要素 $a_i,\ a_j,\ a_k$ をどのように選んでも，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないようにする．このような集合 A は存在しないことを示せ．

(4)　$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ において，$a_n = 2004$ である．集合 A から３つの要素 $a_i,\ a_j,\ a_k$ をどのように選んでも，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないようにするとき，集合 A の要素の個数 n すなわち $n(A)$ の最大値を求めよ．

（ヒント：$2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないときの集合 A の要素を10進法以外の表し方で表してみよう）

第４問　Ａ，Ｂ２つの袋があり，Ａの袋には赤球３個，白球３個の計６個，Ｂの袋には赤球３個，白球５個の計８個が入っている．いま，次の試行の順で実行する，

試行１：Ａの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出し，Ｂの袋の中に入れる．

試行２：Ｂの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出し，Ａの袋の中に入れる．

試行３：Ａの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出す．

以下の問いに答えよ．

⑴　試行１において，取り出された２個の球が赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

⑵　試行１のあと，試行２において取り出された２個の球が，赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

⑶　試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球が，赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

⑷　試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球における赤球の個数の期待値を求めよ．

第５問　正の実数 x，y について定義された関数 $f(x,\ y)$ が，次の性質を満たしている．

（性質１）$f(1,\ 1)=1$

（性質２）$f(y,\ x)=f(x,\ y)$

（性質３）$f(x+1,\ y)=\dfrac{x}{x+y}\cdot f(x,\ y)$

以下の問いに答えよ

(1)　$f(2,\ 1)$ の値を求めよ．

(2)　$f(3,\ 2)$ の値を求めよ．

(3)　自然数 m に対して，$f(m,\ 1)=\dfrac{1}{m}$ であることを示せ．

(4)　自然数 m，n に対して，$f(m,\ n)=\dfrac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}$ であることを示せ．

ただし，$k!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot k$，$0!=1$ とする．

(5)　(3)の事実から，正の実数 x に対して，$f(x,\ 1)=\dfrac{1}{x}$ と定めることとする．

そのとき，自然数 n に対して，$f(x,\ n)=\dfrac{(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}$ であること

を示せ．