**第５問**　正の実数 $x$，$y$ について定義された関数 $f(x,\ y)$ が，次の性質を満たしている．

（性質１）$f(1,\ 1)=1$

（性質２）$f(y,\ x)=f(x,\ y)$

（性質３）$f(x+1,\ y)=\dfrac{x}{x+y}\cdot f(x,\ y)$

以下の問いに答えよ

(1)　$f(2,\ 1)$ の値を求めよ．

(2)　$f(3,\ 2)$ の値を求めよ．

(3)　自然数 $m$ に対して，$f(m,\ 1)=\dfrac{1}{m}$ であることを示せ．

(4)　自然数 $m$，$n$ に対して，$f(m,\ n)=\dfrac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}$ であることを示せ．

ただし，$k!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot k$，$0!=1$ とする．

(5)　(3)の事実から，正の実数 $x$ に対して，$f(x,\ 1)=\dfrac{1}{x}$ と定めることとする．

そのとき，自然数 $n$ に対して，$f(x,\ n)=\dfrac{(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}$ であること

を示せ．

着眼点

(1)，(2)のトレーニングから，$f(x,\ y)$ の値は，$f(x-1,\ y)$ または $f(x,\ y-1)$ を用いて表されることがわかる．だから，求める値は，逐次１を引いた関数値に置き換えて考えていくことができる．(5)は苦肉の策であったが，$f(m,\ 1)=\dfrac{1}{m}$ から，$f(x,\ 1)=\dfrac{1}{x}$ と定義するのは自然であろう．ただ，これを一般の $f(x,\ y)$ に拡張するためには，極限の処理が必要になるため，出題を断念した．

解答例

(1)　$f(2,\ 1)=\dfrac{1}{1+1}f(1,\ 1)$　　（性質３）

$=\dfrac{1}{2}$　　（性質１）

(2)　$f(3,\ 2)=f(2,\ 3)$　　（性質２）

$=\dfrac{1}{1+3}f(1,\ 3)$　　（性質３）

$=\dfrac{1}{1+3}f(3,\ 1)$　　（性質２）

$=\dfrac{1}{1+3}\cdot\dfrac{2}{2+1}f(2,\ 1)$　（性質３）

$=\dfrac{1}{12}$　　((1)より)

(3)　$m>1$ のとき，

$$f(m,\ 1)=\frac{m-1}{m}f(m-1,\ 1) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m-1}f(m-2,\ 1) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{m-3}{m-2}f(m-3,\ 1) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}f(1,\ 1) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{1}{m}f(1,\ 1)$$

$$=\frac{1}{m} \qquad \text{（性質１）}$$

もちろん，$m=1$ のときも成り立っている．

(4) $n>1$ のとき，

$$f(m,\ n)=f(n,\ m) \qquad \text{（性質２）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+m}f(n-1,\ m) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+m}\cdot\frac{n-2}{n-2+m}f(n-2,\ m) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+m}\cdot\frac{n-2}{n-2+m}\cdot\frac{n-3}{n-3+m}f(n-3,\ m) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+m}\cdot\frac{n-2}{n-2+m}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1+m}f(1,\ m) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+m}\cdot\frac{n-2}{n-2+m}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1+m}\cdot\frac{1}{m} \qquad \text{（(3)より）}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)m}$$

$$=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

もちろん，$n=1$ のときも成り立っている

(5) $n>1$ のとき，

$$f(x,\ n)=f(n,\ x) \qquad \text{（性質２）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+x}f(n-1,\ x) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+x}\cdot\frac{n-2}{n-2+x}f(n-2,\ x) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+x}\cdot\frac{n-2}{n-2+x}\cdot\frac{n-3}{n-3+x}f(n-3,\ x) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+x}\cdot\frac{n-2}{n-2+x}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1+x}f(1,\ x) \qquad \text{（性質３）}$$

$$=\frac{n-1}{n-1+x}\cdot\frac{n-2}{n-2+x}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x} \qquad \text{（定義より）}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}$$

もちろん，$n=1$ のときは定義どおりである．

$\boxed{\text{配点}}$ (1)　4点　(2)　6点　(3)　8点　(4)　10点　(5)　12点

$\boxed{\text{講評}}$

(1)　$f(2,\ 1)$ の値はほとんどの人が出来ていました．出来なかった人は，（性質３）の $x$，$y$ に具体的な整数値を入れて試みるとよい．計算式のないものは減点２点．また，(4)の結果を証明なしに利用したものは点を与えませんでした．(2)も同様です．

(2)　$f(3,\ 2)$ の値も，$f(2,\ 2)$，$f(2,\ 1)$ の値から出てきます．

(3)　数学的帰納法で解いている人（２年生）が多く見られました．ただ，$m=1$ のときのチェックが抜けていたり，$m=k+1$ を仮定して，$m=k$ を示した人がいました．

(4)　一般の場合の証明です．(3)の結果を大いに利用して欲しいものです．ただ，$m=1$ の場合と $m>1$ の場合にわけて証明することが肝要です．(3)と同様に，$n$ を固定し $m$ に関する数学的帰納法で証明したひとも結構いました．

(5)　こちらの問題の方が，本当は易しいかもしれません．$n$ に関する数学的帰納法が使えます．$x$ は正の実数ですから，$x$ に関する帰納法は使えませんので気をつけて．実は，一般に $f(x,\ y)$ の式を証明してもらおうかと考えましたが，

$$f(x,y)=\frac{x+y}{xy}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1+\frac{xy}{1\cdot(1+x+y)}}\cdot\frac{1}{1+\frac{xy}{2(2+x+y)}}\cdot\frac{1}{1+\frac{xy}{3(3+x+y)}}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{1+\frac{xy}{n(n+x+y)}}\right\}$$

という式になり，到底出題できるものにはなりませんでした．

ちなみに，満点者も多く，21名にものぼります．よくぞやったと感心しております．

北海道札幌平岸高等学校　古川政春