第４問　A，B２つの袋があり，Aの袋には赤球３個，白球３個の計６個，Bの袋には赤球３個，白球５個の計８個が入っている．いま，次の試行の順で実行する，

試行１：Aの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出し，Bの袋の中に入れる．

試行２：Bの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出し，Aの袋の中に入れる．

試行３：Aの袋の中をよくかき混ぜて，２個の球を取り出す．

以下の問いに答えよ．

⑴　試行１において，取り出された２個の球が赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

⑵　試行１のあと，試行２において取り出された２個の球が，赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

⑶　試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球が，赤球１個，白球１個となる確率を求めよ．

⑷　試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球における赤球の個数の期待値を求めよ．

解答例

⑴　$\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{3\cdot3}{15}=\dfrac{3}{5}$

⑵　試行１において，赤球２個となる確率は，$\dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{5}$

試行１において，白球２個となる確率は，$\dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{5}$

まとめると，試行１において，取り出す２個の球の色は次のとおり．

試行１：

色	赤2	赤1白1	白2
確率	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

試行１の結果に応じて，Bの袋の中の赤球，白球の個数は，

試行1	Bの(赤，白)
赤2	(5，5)
赤1白1	(4，6)
白2	(3，7)

となるから，試行２において取り出された２個の球の色が赤球１個，白球１個となる確率は，

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_6C_1}{{}_{10}C_2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{45}+\frac{3}{5}\cdot\frac{24}{45}+\frac{1}{5}\cdot\frac{21}{45}=\frac{118}{225}$$

⑶　試行１を実行したあとのBの袋の中と，さらに試行２を実行したあとのAの袋の中の

赤球，白球の個数は，

試行1	Bの(赤，白)	試行2	Aの(赤，白)
赤2	(5，5)	赤2	(3，3)
赤2	(5，5)	赤1白1	(2，4)
赤2	(5，5)	白2	(1，5)
赤1白1	(4，6)	赤2	(4，2)
赤1白1	(4，6)	赤1白1	(3，3)
赤1白1	(4，6)	白2	(2，4)
白2	(3，7)	赤2	(5，1)
白2	(3，7)	赤1白1	(4，2)
白2	(3，7)	白2	(3，3)

となるから，試行３において，取り出された２個の球が赤球１個，白球１個となる確率は，

$$\frac{1}{5}\left(\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_1C_1\cdot{}_5C_1}{{}_6C_2}\right)$$

$$+\frac{3}{5}\left(\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_4C_1\cdot{}_6C_1}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_5C_1\cdot{}_1C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{10}{45}\cdot\frac{9}{15}+\frac{25}{45}\cdot\frac{8}{15}+\frac{10}{45}\cdot\frac{5}{15}\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{6}{45}\cdot\frac{8}{15}+\frac{24}{45}\cdot\frac{9}{15}+\frac{15}{45}\cdot\frac{8}{15}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{45}\cdot\frac{5}{15}+\frac{21}{45}\cdot\frac{8}{15}+\frac{21}{45}\cdot\frac{9}{15}\right)$$

$$=\frac{1864}{3375}$$

(4)　(3)と同様に，試行１および試行２のあと，試行３において，取り出された２個の球が，赤球２個となる確率は

$$\frac{1}{5}\left(\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\right)$$

$$+\frac{3}{5}\left(\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_4C_1\cdot{}_6C_1}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{10}{45}\cdot\frac{3}{15}+\frac{25}{45}\cdot\frac{1}{15}\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{6}{45}\cdot\frac{6}{15}+\frac{24}{45}\cdot\frac{3}{15}+\frac{15}{45}\cdot\frac{1}{15}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{45}\cdot\frac{10}{15}+\frac{21}{45}\cdot\frac{6}{15}+\frac{21}{45}\cdot\frac{3}{15}\right)$$

$$=\frac{643}{3375}$$

このことから，試行１および試行２のあと，試行３において取り出された２個の球が白球２個となる確率は

$$1-\left(\frac{1864}{3375}+\frac{643}{3375}\right)=1-\frac{2507}{3375}=\frac{868}{3375}$$

よって，試行３において取り出される赤球の個数の期待値は

$$2\cdot\frac{643}{3375}+1\cdot\frac{1864}{3375}+0\cdot\frac{868}{3375}=\frac{3150}{3375}=\frac{14}{15}$$

配点　⑴　6点　⑵　8点　⑶　12点　⑷　14点

講評

確率論の歴史はフランスの数学者パスカルとフェルマーの往復書簡に始まります．またそのきっかけは，シュヴァリエ･ド･メレという賭け事の好きな人が，友人のパスカルに質問をしたことでした．「さいころを４回投げたとき，少なくとも１回６の目が出る確率」という問題や「実力が同等で，勝ち負けの可能性が半々の２人Ａ，Ｂが３番勝負（どちらか２回勝ったほうが勝ち）をした．１回戦でＡが勝ったときに，ある事情で賭けを中止するならば，掛け金をどう配分したらよいだろうか」という問題をフェルマーとパスカルが往復書簡を通し，確率論が築かれていったと言われています．

本問については，⑵以降は計算が多く大変だったと思いますが，表にまとめたり，わかりやすく書いている答案が多かったように思います．満点は12名でした．

⑴の正答率は70％でした．教科書によくある問題です．

⑵の正答率は47％でした．試行１の結果を無視して，試行２を単独で考えている答案がいくつかありました．全部の場合を含めて計算しているのなら，それでいいのですが，結果的にはもれていたりします．

⑶の正答率は12％でした．⑶についても⑵と同様のことが言え，中には計算結果として１を越えているものもありました．確率を P とすると，$0\leqq P\leqq 1$ です．

⑷の正答率は4％でした．試行３において赤２個となる場合の確率を求めれば，赤０個となる場合の確率は求める必要はありません．

確率の問題では全事象を速く，正確に，もれなく表現することが求められます．一般に私たちは，目の前のことは時間をかけて論議するけれども，見えない部分は知らん顔という状況に陥りがちです．数学はそのような隠された部分を解き明かすという面白味があるように思います．今回うまく解けなかった諸君も決して落胆することなく，学習を続け，力をつけていくことを願っています．

北海道札幌東陵高等学校　前田勝利