第３問　負でない整数からなる集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ を考える．

ただし，$0 \leqq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots\cdots < a_n$ であるとする．

(1)　$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ について，$0 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 8$ かつ $2a_2=a_1+a_3$ が成り立っている．A の要素の１つ a_i が 4 であるとき，A はどんな集合か．すべて求めよ．（解答は結果のみ示せばよい）

(2)　$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_6\}$ において，$a_6 \leqq 10$ であるとき，A から３つの要素 a_i，a_j，a_k をどのように選んでも，$2a_j=a_i+a_k$ が成り立たないという．そのような A を１つ答えよ．（解答は結果のみ示せばよい）

(3)　$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ は，$n \geqq 9$ かつ $a_n \leqq 18$ を満たし，A から３つの要素 a_i，a_j，a_k をどのように選んでも，$2a_j=a_i+a_k$ が成り立たないようにする．このような集合 A は存在しないことを示せ．

(4)　$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ において，$a_n=2004$ である．集合 A から３つの要素 a_i，a_j，a_k をどのように選んでも，$2a_j=a_i+a_k$ が成り立たないようにするとき，集合 A の要素の個数 n すなわち $n(A)$ の最大値を求めよ．

（ヒント：$2a_j=a_i+a_k$ が成り立たないときの集合 A の要素を10進法以外の表し方で表してみよう）

着眼点

等差数列が既習である参加者には，「$2a_j=a_i+a_k$ が成り立つ」と表現するよりも，「a_i，a_j，a_k が等差数列をなす」と表現する方がわかりやすいと考えたが，ここでは敢えて「等差数列」という語を用いずに問題を作成した．無論，解答において「等差数列」という語を用いても差し支えない．

(1)　$a_i=4$ を，(ｉ) $a_1=4$ の場合，(ii) $a_2=4$ の場合，(iii) $a_3=4$ の場合，の３とおりに分けて求めると，「もれ」なく列挙することができたであろう．

(2)　$2a_j=a_i+a_k$ より，$a_i<a_j<a_k$ としても一般性を失わない．
$0 \leqq a_1 < a_2$ であるから，$a_1=0$，$a_2=1$ とすると，$a_3 \neq 2$．よって，$a_3=3$．以下同様にして，a_3，$\cdots$，a_6 を調べればよい．

(3)　(2)で調べたように，一つ一つ確認すれば，$2a_j=a_i+a_k$ が成り立つ例を見つけることは不可能である．逆に，(4)を先読みして，論述する方法でもよい．

(4)　問題文を見ても，見通しが立たなければ，解答例(3)にあるように，一つ一つ調べるほかない．ヒントを利用して，３進法に気づくと，どの位の数も２とならない３数では $2a_j=a_i+a_k$ が成り立たないことが予想されるが，それを証明してから使うことができたか．

解答例

(1)　$A=\{4,\ 5,\ 6\}$，$\{4,\ 6,\ 8\}$，$\{0,\ 2,\ 4\}$，$\{2,\ 3,\ 4\}$，
$\{0,\ 4,\ 8\}$，$\{1,\ 4,\ 7\}$，$\{2,\ 4,\ 6\}$，$\{3,\ 4,\ 5\}$

(2)　$A=\{0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10\}$　または　$A=\{0,\ 1,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$

(3)　A を負でない整数全体の集合として，小さい順に，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないように選んでいくと，

$\boxed{0}$, $\boxed{1}$, 2, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, 5, 6, 7, 8, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, 11, $\boxed{12}$, $\boxed{13}$, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, $\boxed{27}$, $\boxed{28}$, 29, $\boxed{30}$, $\boxed{31}$, 32, 33, ……

したがって，$a_n \leqq 18$ とすると，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないように選べる要素の個数は最大で８個であることがわかる．

ゆえに，９個以上の要素からなる集合は存在しない．（詳しい証明は，次項参照）

(4)　該当する数を３進法で書いてみると，

$0=0$，$1=1$，$3=10$，$4=11$，$9=100$，$10=101$，$12=110$，$13=111$，
$27=1000$，$28=1001$，$30=1010$，$31=1011$，……

したがって，３進法で表したとき，どの位の数も 2 とならない集合を S とすると，相異なる任意の $a_i, a_j, a_k \in S$ について，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないことを示す．

ある $a_i, a_j, a_k \in S$ について，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立つと仮定すると，$2a_j$ を３進法で表したとき，各位の数は 0 または 2 である．また，$a_i + a_k$ においては，繰り上がりは起こりえないので，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立つとき，$2a_j$ の m 桁目の数が 0 または 2 ならば，a_i，a_k の m 桁目の数はそれぞれ 0 または 1 となり，$a_i = a_k$ である．

よって，$a_i = a_j = a_k$ となって，３数が相異なることに反する．

ゆえに，３進法で表したとき，どの位の数も 2 とならない集合を S とすると，相異なる任意の $a_i, a_j, a_k \in S$ について，$2a_j = a_i + a_k$ が成り立たないことが示せた．

ここで，2004 を３進法で表すと 2202020 となるので，2202020 以下で，0 または 1 で表せる数の個数が，求める $n(A)$ の最大値である．

したがって，0 と 1 でできる重複順列の個数に等しいので，$n(A) = 2^7 = 128$．

配点　(1)　12点　(2)　8点　(3)　8点　(4)　12点

講評

この問題では，数列 $\{a_n\}$ という表現を使わず，集合 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ という表現を使っている．また，「等差数列」という言葉を使わず，「$2a_j = a_i + a_k$（等差中項）」とだけ表現した．多くの受験者は，自分のもっている知識や経験により等差数列に帰着させて解いていた．しかし，解答する際に，問題文では A が集合と定義されていることを忘れ，「$\{\cdots,\ \cdots\}$」という表記法を用いていない答案も見られた．たとえ，問題が他の分野に置き換えることができても，問題で定められた表現を用いることが望ましい．

(1)　着眼点にあるように求めていれば８つすべてを列挙できたであろうが，手当たり次第に列挙したり，0 を要素として含めてよいことを見落としたために，８つそろっていない答案も多かった．また，逆に 4 を含んでいない集合を答えた受験者もいた．問題は注意深く読みとるべきである．正解１つにつき1.5点（端数は切り捨て）とし，余分な答えがある場合には１つにつき 1点減点した．

⑵　解答例以外にも，{0,1,4,6,9,10}，{0,1,3,7,9,10}，{0,1,3,7,8,10}なども正解である．当てずっぽうで正解を見つけだしたと思われる答案もあったが，ここで論理的に正解を導くことで，⑶⑷を解く手がかりがつかめるのであるが…．なお，中には，要素が５つしかない集合や，10を超える数を含んだ集合を解答しているものもあった．また，a_i，a_j，a_k は単に要素としか記していないのに，連続（隣接）する要素と勝手に解釈している答案もあった．

⑶⑷　「どのように選んでも」の意味が理解できていない答案が多かった．「どのように選んでも」ということは，「都合よく選ぶと」ではないのだから，一例だけ示して終わりということにはならない．このような証明問題に慣れていないからと思われるが，数学では，「任意の」などといった，日常使わない独特の言い回しを使うことがある．受験者は，コンテストに参加するという点で，数学に対して積極的な生徒であるから，独特の言い回しにも慣れてほしい．

解説にあるような解法（グリーディアルゴリズム）で点を与えられたのは，受験番号17，35，49，65，306，348，414の７名．特に，65矢本（札北２）と348酒井（岩東２）はきちんと式を用いて論理立てて示してくれた．

解説⑷にあるように３進法に辿り着いたのは，15，35，36，231，424の５名．中には231河岸（釧湖陵２）のように「３進法」という表現を用いてはいないが，的確に筋道立てて示すことで結果的に３進法に結びついていたものもある．しかし，残念ながら，なぜ「３進法で表したときに0と1だけで表される数は等差数列をなさない」のかが証明されていないものが多かった．こういった補題はきちんと示してから使うべきである．

不十分ではあるが，「公差1，公差2，公差3，…の数列ができないように」とか「階差数列が1，2，3，…になれば」といった方法を試した答案もあった（19，312，423）．しかし，これらの方法は具体的に書いてみることで，おかしな点に気づけるものであろう．そういった手間を惜しまずに数学に取り組めば，真の力がついていくと思う．ぜひ精進してほしい．

⑶では，対偶や背理法を用いて証明しようという答案がいくつかあった．残念ながら点を与えるまでには至らなかったが，自分のもっている知識や経験をすべて引き出して解答しようという前向きな姿勢には好感が持てる．

⑷は結果的に得点を得た者がわずかで，出題者としては「３進法」と指定すべきだったかと反省している．そういった感想もコンテスト事務局に寄せていただけるとありがたいと思う．

北海道札幌白石高等学校　平間順宏