第２問　「△ABCのそれぞれの内角の３等分線の交点のうち，辺に近い３点を結んでできる三角形は正三角形である（モーレーの定理）」

この定理は，どのような三角形についても成立すること，様々な証明方法が可能なことでもよく知られています．ただし，一般の角について定規とコンパスだけを用いて角の三等分線を作図することは不可能であるので，図を描くにも工夫が必要です．次のように答案用紙に作図しながら，この定理の証明をしなさい．

⑴　答案用紙の △BCG について，∠B，∠C の２等分線を定規とコンパスを用いて作図し，２等分線の交点 D を答案用紙の図に描きなさい．

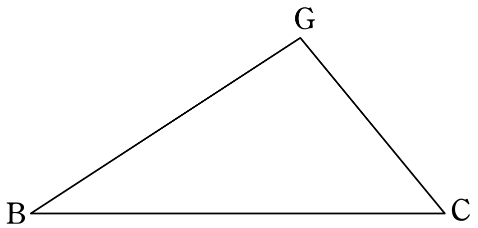
⑵　線分 GD は ∠G の２等分線であることを証明しなさい．

⑶　線分 BG，CG に関して点 D と対称な点をそれぞれ M，N とするとき，M，N を作図せよ．また，直線 BM と直線 CN の交点 A も作図せよ．

⑷　線分 BG 上に点 E を，線分 CG 上に点 F をとって，∠EDG＝∠FDG＝30° となるようにするとき，△DEF は正三角形になることを証明しなさい．

⑸　５つの点 A，M，N，E，F は同一円周上にあることを証明しなさい．

⑹　以上のことを利用して，モーレーの定理が成り立つことを証明しなさい．



着眼点

平面幾何の分野で有名な定理の一つである「モーレーの定理（フランク·モーレーの定理）」を証明する問題です．この定理は視覚的にはわかりやすいのですが，証明はそれほど易しくはありません．誘導形式の出題としましたが，作図さえちゃんとできていれば他の方法（正弦定理を利用する，ベクトルを利用する，複素数を利用するなど）でも証明に対する採点を行います．

角の３等分は「図形の三大不可能問題」の一つで，それらはいずれも１９世紀末には定規とコンパスを有限回使うという操作では作図不可能であることが証明されています．

【図形の三大不可能問題】

①与えられた立方体の２倍の体積を有する立方体を作る．　（立方体倍積問題）

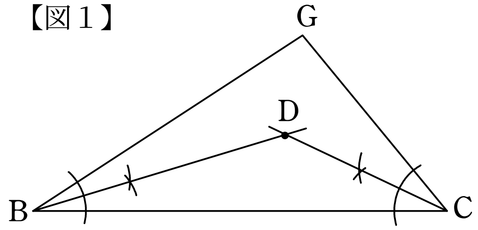
②任意に与えられた角を３等分する．　（角の３等分問題）

③与えられた円と等しい面積を有する正方形を作る．　（円積問題）

解答例

⑴　図１参照

【図１】

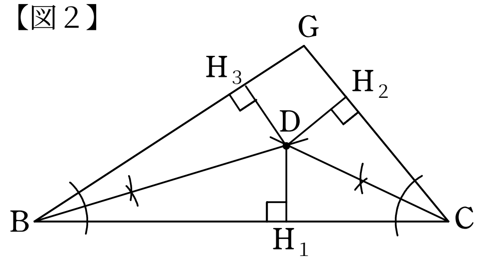


⑵　点D は△BCG の内心であるから，GD は∠G の２等分線である．［証明終］

【別解：内心の性質を用いずに証明を行う場合】

点D から△BCG の３辺BC，CG，GB に引いた垂線の交点をそれぞれH_1，H_2，H_3とする．ここで，△DBH_1と△DBH_3において，

【図２】



$\angle BH_1D = \angle BH_3D = 90°$

DB は共通

$\angle DBH_1 = \angle DBH_3$

により，$\triangle DBH_1 \equiv \triangle DBH_3$であるから，

$DH_1 = DH_3$　である．

同様に，$\triangle DCH_1 \equiv \triangle DBH_2$ より $DH_1 = DH_2$ が得られるので，$DH_2 = DH_3$.

ここで，△DGH_2と△DGH_3において，

$\angle GH_2D = \angle GH_3D = 90°$

DG は共通

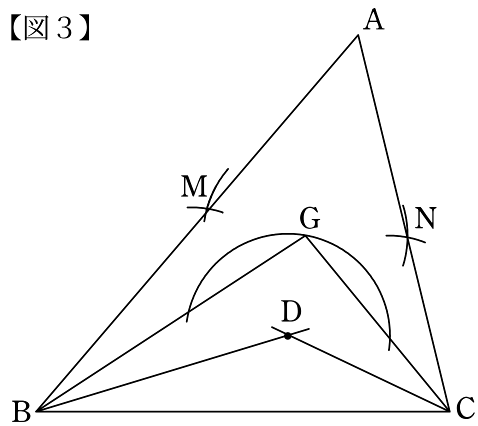
$DH_2 = DH_3$

により，$\triangle DGH_2 \equiv \triangle DGH_3$であるから，$\angle DGH_2 = \angle DGH_3$.

ゆえに，GD は∠G の２等分線である．［証明終］

⑶　図３参照

【図３】



⑷　△DEGと△DFGにおいて，

$\angle EGD = \angle FGD$　（⑵より）

$\angle EDG = \angle FDG$

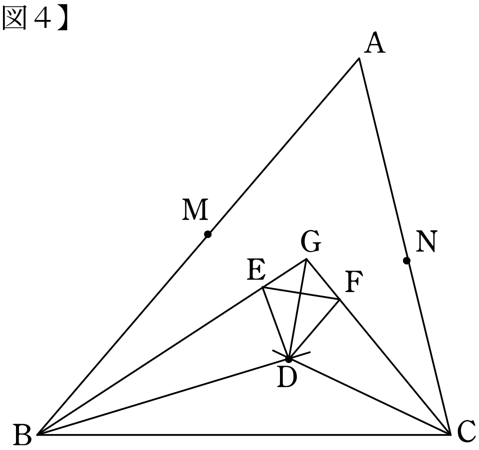
DGは共通

であるから，$\triangle DEG \equiv \triangle DFG$．

よって，$DE = DF$.

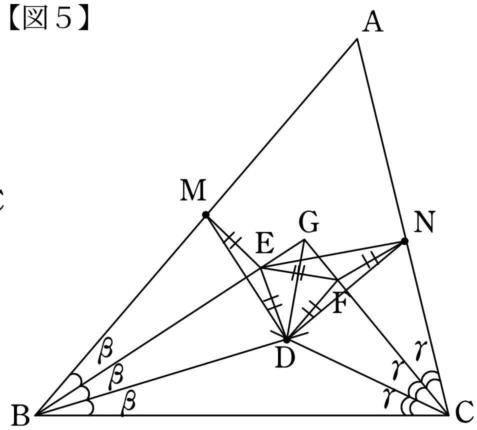
△DEFは，$DE = DF$ かつ $\angle EDF = 60°$ であるから，正三角形である．［証明終］

【図４】



⑸　まず，４点A，M，E，Nが同一円周上にあること，すなわち，四角形AMENが円に内接することを示す．

【図５】



$\angle ABC = 3\beta$，$\angle ACB = 3\gamma$ とする．

DとM，DとNはそれぞれBG，CGに関して対称だから，$DE = ME$，$DF = NF$，

$\angle EMB = \angle EDB$，$\angle FDC = \angle FNC$

まず，∠ENAを求める．

$\angle GDC + \angle DCG + \angle DGC = 180°$ より，

$$\angle GDC = 180° - \left(\gamma + \frac{1}{2}\angle BGC\right) \quad \cdots ①$$

$\angle BGC + 2\beta + 2\gamma = 180°$ であるから，

$$\frac{1}{2}\angle BGC = 90° - (\beta + \gamma) \quad \cdots ②$$

①と②から，$\angle GDC = 180° - \{\gamma + (90° - \beta - \gamma)\} = 90° + \beta$

また，$\angle GDF = 30°$ であることから，$\angle FDC = \angle GDC - \angle GDF = 60° + \beta$

したがって，$\angle FNC = 60° + \beta$　…③

また，$\angle DCN = 2\gamma$ であるから，四角形FDCNの内角の和に着目して，

$$\angle DFN + 2(60° + \beta) + 2\gamma = 360°$$

よって，$\angle DFN = 360° - 2(60° + \beta) - 2\gamma = 240° - 2(\beta + \gamma)$　…④

△DEFが正三角形であるから，$\angle EFD = 60°$ なので，

④より，$\angle EFN = 360° - \angle DFN - \angle EFD = 360° - \{240° - 2(\beta + \gamma)\} - 60°$

$= 60° + 2(\beta + \gamma)$　…⑤

△FENは $FE = FN$ の２等辺三角形だから，

⑤より，$\angle FNE = (180° - \angle EFN) \div 2 = \{120° - 2(\beta + \gamma)\} \div 2 = 60° - (\beta + \gamma)$

よって，$\angle ENA = 180° - \angle FNE - \angle FNC$

$= 180° - \{60° - (\beta + \gamma)\} - (60° + \beta) = 60° + \gamma$　…⑥

次に，∠AMEを求める．

③と同様にして，$\angle EMB = 60° + \gamma$

よって，$\angle AME = 180° - \angle EMB = 180° - (60° + \gamma) = 120° - \gamma$　…⑦

⑥と⑦より,

$$\angle\mathrm{AME}+\angle\mathrm{ANE}=(120^\circ-\gamma)+(60^\circ+\gamma)=180^\circ$$

ゆえに，四角形AMENは円に内接するので４点A，M，E，Nは同一円周上にある．

同様にして，４点A，M，F，Nも同一円周上にあることが示せる．

ゆえに，５点A，M，N，E，Fは同一円周上にある．［証明終]

⑹　⑸の結果から，５点A，M，N，E，Fは同一円周上にある．また，ME＝EF＝FNであるから，∠MAE＝∠EAF＝∠FANが成り立つ．したがって，線分AE，AFは∠MAN(＝∠BAC)の３等分線である．また，線分BD，BEは∠ABCを，線分CD，CFは∠ACBを，それぞれ３等分している．ゆえに，３点D，E，Fは，△ABCの各内角の３等分線の交点になっている．

また，⑷より△DEFは正三角形である．

ゆえに，モーレーの定理が成り立つことが示された．

配点　⑴～⑷　各5点　⑸⑹　各10点

講評

数学コンテストでは平面幾何（いわゆる平面図形）の問題をほとんど毎年出題してきました．今でも少なくとも１問は平面幾何の問題を出題していこうという考えは変わりません．特に平面幾何における「作図」と「証明」は他の分野の問題においても発想として重要なものが多いだけに，今の高校生にとってぜひ学んでほしい内容であると思います．幾何分野は現高２までは数Aの選択分野となっているので高校では習っていない人も多いと思いますが，現高１からは必修分野になりました．今回の題材「フランク･モーレーの定理」は高校の教科書には出てきませんが，おもしろい定理なのでどこかで見たことがあるという人もいるかもしれません．証明はけっこう難しく，様々な証明方法があるということですが，私が調べて見つかったのは解答と解説に載せた方法と発見者が最初の論文で用いた三角比（倍角公式，加法定理など）を用いる方法です．皆さんの答案を見ても，ごく少数座標を用いて証明を試みた人はいましたが，ほとんど初等幾何（図形の性質）的なやり方で取り組んでいました．

さて，このフランク･モーレーの定理ですが，発見されたのが1899年と数学の歴史の中では比較的新しいものです．変な話ですが，数学が様々な分野で発展していく中で，昔からある平面幾何の分野でこんなおもしろい定理が残っていて今まで発見されないでいたということの方が意外だ，という反応があったようです．英語では「モーレーズ･ミラクル（モーレーの奇跡）」という言葉がインターネットのサイトにありました．発見以来様々な証明方法が工夫され，「解答と解説」に載せた証明は高校生でも理解できるものだと思います．やり尽くされたと思われている分野にこんな美しい定理が隠れていたとは！数学の奥深さを感じますね．

今回の問題は，先の「解答と解説」にも書いたようにフランク･モーレーの定理を作図しながら解説を交えて証明してもらおうという意図のもとに作られました．実はこの問題は既に昨年の段階で出題検討問題の中に含まれていたのですが，そのまま出題したのでは高校生には難しすぎるとの声もあり見送られたものです．今年の問題検討の中で，幾何の

問題が手薄であるということもあって手直ししてこのような形になりました．本来，幾何の問題は問題の意味を，作図を通して理解してもらうという形で枝問を作ることが多いのですが，この問題はまず最初に角の３等分線が出てきてしまうので，普通の方法では作図ができません．まず２つの角の２等分線を引き，角の２等分線の交点（内心）を求めることと作った２等分角をもう一つつなげることによって３等分角を作るという手順を考えました．角の３等分は「解答と解説」に載せた「作図の三大不可能問題」の一つですから，通常の定規とコンパスのみを用いて作図はできないのでこのように問題を変えたわけです．そのせいか，ほとんど全員が作図には手をつけ，証明部分も⑵⑷は半数以上の人が手をつけていました．

全般的に多くの人が手をつけてくれて，コンテストとしては出来も悪くはないのですが，残念なのは⑸の出来が特に悪く（予想通りではあるのですが）最終的にフランク･モーレーの定理の証明を完全に示した人が一人もいなかったことです．ただ，⑸の証明ができなくても，⑸が成り立っているものとして⑹の証明を行っていた人はけっこういたので問題の意図は理解できているのではないかという気はしています．

⑴は予想通りというべきでしょうか，ほとんどの人が手を付けて正解していました．誤答としては線分 GC の中点と点 B を結んだ人もいましたがごく少数でした．作図はコンパスと定規のみを使うのですが，何人かコンパスを使わずフリーハンドで等距離の点を求めていた人もいて，図の中に描いた方法が分かるようにしてある場合は正解にしています．困るのは線を引いたあと消しゴム等でコンパスの線を消したと見られる答案で，見て方法が推察できる場合は正解としましたが，ごく一部にどうしてこのようになったのか理解に苦しむものもあり減点またはバツとしています．

⑵は，⑴で求めた点 D と三角形のもう一つの頂点 G を結んだ線分 DG は角 G の２等分線になることを証明せよというものです．これは「三角形の３つの角の２等分線の交点は１点で交わる」という性質を使えば証明はわずか１行ですみます．このことは三角形の内心の定義でもあるので「点 D は △BCG の内心であるので線分 GD は角 G の２等分線になっている」などとしても正解ですし，そのような答案が最も多かったです．点 D のことを重心と書いていた人もいましたが，重心は三角形の頂点と辺の中点を結ぶ線分の交点ですのでその部分は間違いです．また角の２等分線は各辺から等距離にある点の集まりであるということを用いて点 D から各辺に引いた垂線の長さが等しいことを利用して証明していた人もいました．この問題は手をつけた人の９割ぐらいは正解でした．

⑶は再び作図です．線分に関して対称な点ということを間違えて考えて点 D の対称点を線分 CD の延長線上にとっていた人もいましたが，線分に垂線を引いて点Dと逆側で線分から等距離の点を求めるとよいのです．一番簡単な方法は点 B を中心に点 D を通る円を作図し，一方，点 G を中心に点 D を通る円も作図してこの２円の交点を M とする方法です．次が「解答と解説」に載せた方法です．本来定規とコンパスを用いて作図せよとした場合，垂線を引くためにはコンパスを使うのが普通ですが，答案の中には三角定規の直角を用いて垂線を引いたと見られるものもありました．原則的に定規とコンパスを用いた作図の場合，直角を作るときも，距離を測り円を描くコンパスと決められた２点を結ぶ

直線を描く定規の機能だけを用いることになっています．問題が(4)(5)と続くこともあって答案の中にさらに多くの点を作図した結果，図が見づらくなっている答案もありました．また，BG に関する対称点を BC に関する対称点と勘違いして点 M，N の位置がおかしくなっているものもありました．それでも正答率はかなり高かった問題です．

(4)は △EDF が正三角形であることの証明です．これは △EDG と △FDG が合同であることを証明すれば，DE＝DF で ∠EDF＝60° より，角のうちの１つが 60° である二等辺三角形は正三角形であるとするのがもっとも短い証明でしょう．（解答と解説のやり方）中には，D は内心なので DE＝DF としていた答案もありましたが，E，F は内接円の接点ではありませんし，もしそうだったとしても接点であることの説明を書かなければなりません．また，線分 EF と線分 GD は直交するので △DEF は正三角形とした人もいました．これは間違いではないのですが，先に直交することを示さない限り正しい解答とはいえません．証明問題では証明すべきことを最初に条件としてしまい，同語反復（トートロジー）に陥ってしまう間違いがよくよくあります．例えば，今の例でいうと線分 EF と線分 GD は直交するとすれば交点を H として ∠EHD＝90°，また ∠EDH＝30° より ∠DEH＝60°．同様に，∠DFH＝60° より他の角∠EDF＝60° となるといった解答です．一見よさそうですが，最初の前提となる「EF と GD は直交する」が成り立っていなければ，以降の推論はすべて間違いになってしまいます．EF と GD が直交することは，△EDG と △EFG が合同であることを示せば対称性より明らかですが，説明抜きでこのことを明らかというのは乱暴すぎます．また，合同条件を別の三角形で用いて MD と EB の交点をI，ND と GC の交点を J などとして △EID と △FJD の合同を用いていた人などもいました．幾何の問題では人によってさまざまな別解が出てくるのが採点上の苦労でもあり楽しみでもあります．

(5)では前述したようにこれについては完璧な答案はありませんでした．「解答と解説」の証明もかなり長くて大変だと思います．そこでこの問題の採点に関しては証明の筋道で使ういくつかの事柄を気がつくかどうかを採点のポイントとしました．一つ目は△EDF が正三角形で，また点 D と点 M，点 D と点 N の対称性より，ME＝ED＝DF＝EF＝FN が成り立つことです．また，このことから E，D，N は点 F を中心とする円周上にあること，同じく，M，D，F も点 E を中心とする円周上の点であることも重要です．このことから∠EFD＝60°(中心角)より∠END＝30°(円周角)．同様に，∠DMF＝30° も導けます。

もう一つは，△EMD と△FDN は合同な二等辺三角形であることです．このことを用いると，四角形 EFNM は等脚台形であること，△MEF と △EFN も合同であることが示せます．「解答と解説」の方法のポイントは，四角形 MBDE，四角形 DCNF がともに隣りあう辺の長さが等しい図形である（凧形）であるという点なのですが，このやり方で取り組んだ答案はほとんどありませんでした．もちろんいろいろなやり方で証明を考えることも大事なので自分のやり方で行き詰った人はいろいろ調べてみてもいいでしょう．

(6)については，(5)ができなかったので手をつけなかったという人も多いと思いますが，採点者の立場からいうと，考え方ができていれば(5)の未完成部分に目をつぶって(6)の採点

を行おうと考えていたので，ぜひ取り組んでほしかったところです．ここのポイントは⑸より点A，M，E，F，Nが同一円周上にあり，ME＝EF＝FN（⑸より）から円周角の性質より ∠MAE＝∠EAF＝∠FANが成り立つので，AE，AF は∠A の３等分線になっていることを示すことです．説明ぬきで EA，FA は∠A の３等分とした答案には点は与えていません．⑸ができていることは前提にはしていません．というのは，歴史上の難問でも問題が複雑になればなるほど問題を分割して一つ一つ解決していくことで証明された場合も多いからです．

今回の問題の作成に当たってはいくつかの書物及びインターネットのサイトを参考にしました．ぜひ，これらも参照してください．

幾何学大辞典　聖文社発行（分厚くて普通の本屋さんには置いてありませんが，学校の図書館にはあると思います）

講談社ブルーバックス　「パズルでひらめく補助線の幾何学」（中村義作著）
「定木とコンパスで挑む数学」（大野栄一著）
（比較的新しい本なので書店等でも見つけられると思います）

北海道札幌新川高等学校　佐々木光憲