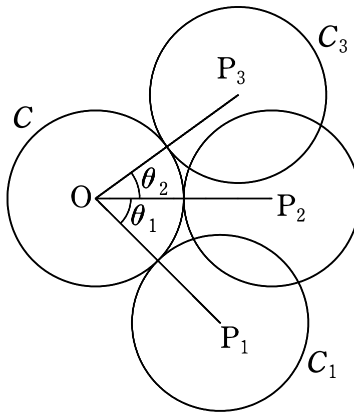
第１問　半径１の円 C, C_1, C_2, $\cdots$, C_n がある．いま，円 C に外接するように n 個の円 C_1, C_2, C_3, $\cdots$, C_n を左回りに順に重なるように描いていく．ただし，各円 $C_k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ は，互いに他の円の中心を含まないように，かつ，互いに中心を通過しないように描いていく．次の問いに答えよ．

⑴　円 C の中心をO，円 C_k の中心を P_k とし，$\angle \mathrm{P}_k\mathrm{OP}_{k+1}=\theta_k$ とするとき，$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の長さを θ_k で表せ．

⑵　$\cos\theta_k$ の値の範囲を求めよ．

⑶　n の最大値を求めよ．必要ならば，$\cos 28^\circ > 0.88$ を用いてよい．



第１問

$\boxed{\text{着眼点}}$

⑴　余弦定理を用いる．

⑵　図形的に $1<\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}<2$.

⑶　$n=12$ ということが予想できる．そこで，$n=13$ ではできない理由と，$n=12$ ができる例が必要となる．問題文の中の $\cos 28^\circ$ と⑵で求めた $\cos\theta_1$ の値の範囲がヒントとなっている．

$\boxed{\text{解答例}}$

⑴　$\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{OP}_{k+1}$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}{}^2&=\mathrm{OP}_k{}^2+\mathrm{OP}_{k+1}{}^2-2\mathrm{OP}_k\cdot\mathrm{OP}_{k+1}\cos\angle \mathrm{P}_k\mathrm{OP}_{k+1}\\&=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos\theta_k=8-8\cos\theta_k\end{aligned}$$

$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}>0$ であるから，

$$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}=\sqrt{8-8\cos\theta_k}=2\sqrt{2(1-\cos\theta_k)}$$

⑵　「互いに他の円の中心を含まない」かつ「互いに中心を通過しない」のだから，

$1<\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}<2$ より，　　$1<\sqrt{8-8\cos\theta_k}<2$

$$1<8-8\cos\theta_k<4 \qquad \text{ゆえに，}\ \frac{1}{2}<\cos\theta_k<\frac{7}{8}$$

⑶　$n\geqq 13$ のとき，ある θ_k に対して，

$$\theta_k \leqq \frac{360^\circ}{13} < 28^\circ \qquad \therefore \cos\theta_k > \cos 28^\circ > 0.88$$

これは，(2)で得られた $\cos\theta_k < \dfrac{7}{8} = 0.875$ と矛盾する．

よって，$n \leqq 12$ である．

$n = 12$ のとき，$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_{12} = 30^\circ$ とすると，

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\cdots < 0.875$$ となるので，(2)の結果を満たす．

ゆえに，n の最大値は 12 である．