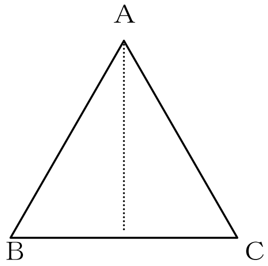
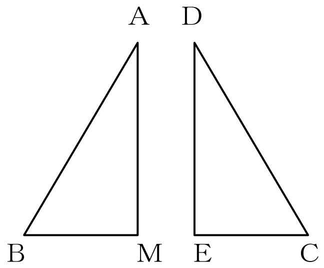
問題５

【Fig-1】のような１辺の長さが４の正三角形 ABC がある。
底辺 BC の中点と点Aを結ぶ線分で△ABC を切断し、【Fig-2】のような２つの合同な三角形△ABM と△DCE を作成する。

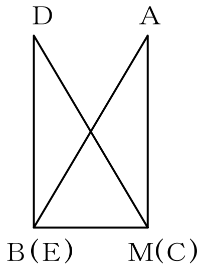


【Fig-1】



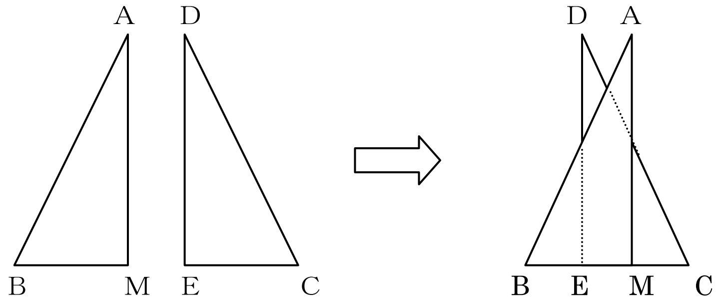
【Fig-2】

問1　△ABM と△DCE の底辺 BM と EC が一致するように重ねてできた【Fig-3】の多角形の面積を求めよ。



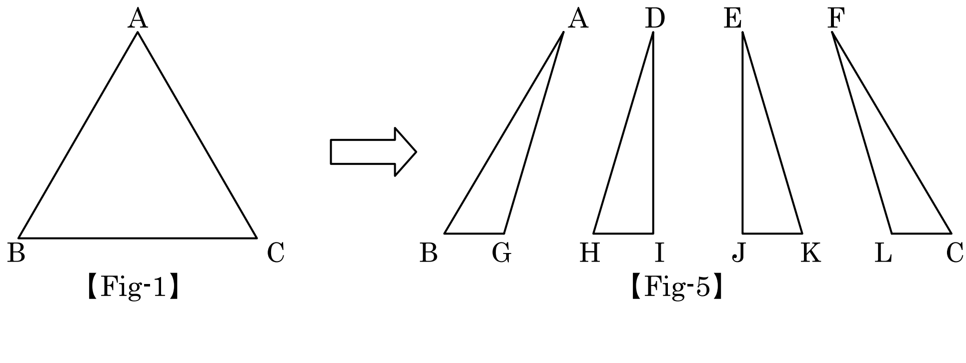
【Fig-3】

問2　△ABM と△DCE を BE＝$\alpha\times$BM ($0<\alpha<1$) となるように底辺の一部が共有するように重ねてできた【Fig-4】の多角形の面積をS(α)とするとき、S(α)をαで表わせ。



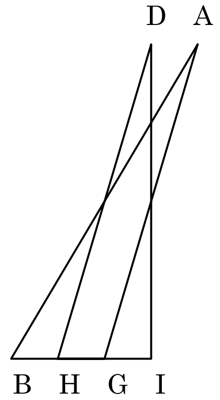
【Fig-4】

更に、この正三角形 ABC【Fig-1】の底辺 BC を４等分して、点 A と結ぶ線分で△ABC を切断し【Fig-5】のような４つの三角形△ABG,△DHI,△EJK,△FLC を作成する。



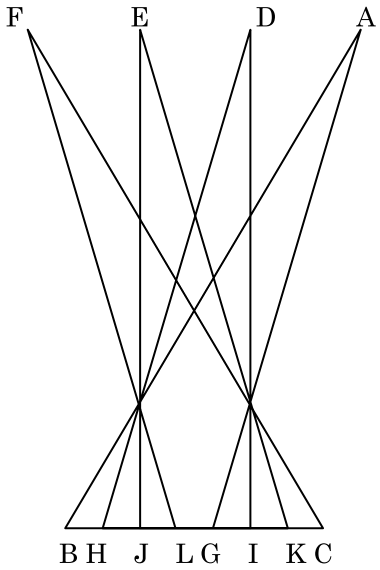
【Fig-1】　【Fig-5】

問3　2 つの三角形△ABG と△DHI について、BH＝α×BG（0＜α＜1）となるよう底辺の一部が共有するように重ねてできた【Fig-6】の多角形の面積を T(α)とするとき、T(α)をαで表わせ。



【Fig-6】

問 4　4 つの三角形 4 つの三角形△ABG,△DHI,△EJK,△FLC について
BH＝α×BG,HJ＝α×HI,JL＝α×JK（0＜α＜1）となるよう底辺の一部が共有するように重ねてできた【Fig-7】の多角形の面積を U(α)とするとき、U(α)をαで表わせ。また、U(α)の最小値とそのときのαの値を求めよ。



【Fig-7】

《注意》持参した、「はさみ」や「のり」等を利用して考えても良い。
また、答案用紙に切り取った図形等を貼り付けて解答しても良い。

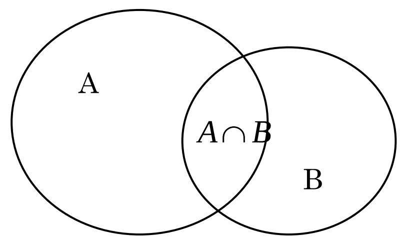
【配　点】
（1）10点　（2）10 点　（3）10 点　（4）10 点
「答えのみ」の解答 5 点　　正解に至らなくても考え方・方針が明確と認められるもの 5 点

問題５

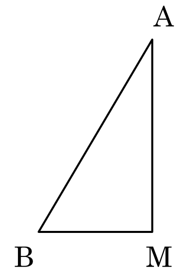
【着眼点】

基本的な集合の個数の和を求める方法を理解していることが必要です。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$を利用して共通部分の面積を見極めることが重要なポイントです。



【解答例】



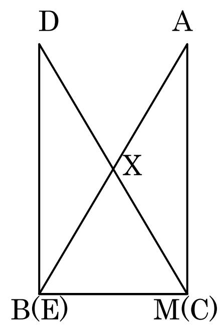
問１　△ＡＢＭについて、ＢＭ＝２，ＡＭ＝$2\sqrt{3}$

△ＡＢＭの面積＝$\dfrac{1}{2}$×ＢＭ×ＡＭ＝$2\sqrt{3}$

△ＡＢＭ≡△ＤＣＥより、

△ＡＢＭの面積＝△ＤＣＥの面積＝$2\sqrt{3}$

底辺ＢＭとＣＥが一致するように重ねた多角形の面積を求める。



線分ＡＢと線分ＤＣの交点をＸとする。△ＸＢＭは１辺が２の正三角形である。

△ＸＢＭの面積＝$\dfrac{1}{2}$×ＢＭ×ＢＸ×$\sin 60^\circ$＝$\sqrt{3}$

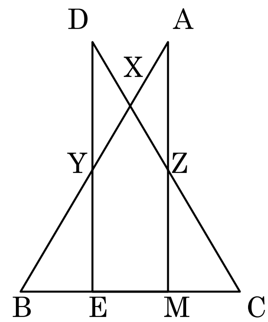
これは、△ＡＢＭと△ＤＣＥの共通部分の面積を表している。

多角形 DBMAX の面積

＝△ABM の面積＋△DEC の面積－△XBM の面積

＝$2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}$

＝$3\sqrt{3}$ ・・・(答)



問２　右図のように線分 AB と線分 DC の交点を X、線分 DE と線分 AB の交点を Y､線分 DC と線分 AM の交点を Z とする。

BE＝α×BM　（０＜α＜１），BM＝２　より

EM＝BM－BE＝BM－α×BM

＝（１－α）BM＝２（１－α）・・・①

△ABM と△YBE は相似より

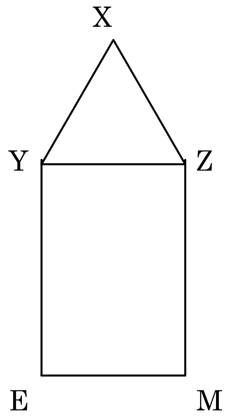
YE : AM＝BE : BM＝α×BM : BM＝α : １

YE＝α×AM　（０＜α＜１），AM=$2\sqrt{3}$より

∴YE＝$2\sqrt{3}\,\alpha$　（０＜α＜１）

△ABM と△DCE の共通部分の面積を求めよう。

右図において△XYZ は正三角形



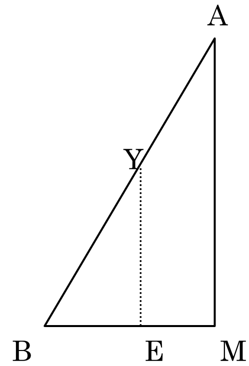
△XYZ の面積＝$\frac{1}{2}\times 2(1-\alpha)\times 2(1-\alpha)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,(1-\alpha)^2$

□YEMZ＝EM×YE＝$2(1-\alpha)\times 2\alpha\sqrt{3}=4\alpha\sqrt{3}(1-\alpha)$

△ABM と△DCE の共通部分である多角形 XYEMZ の面積

＝△XYZ+□YEMZ

＝$\sqrt{3}\,(1-\alpha)^2+4\sqrt{3}\,\alpha\,(1-\alpha)=\sqrt{3}\,(1-\alpha)(1+3\alpha)$



S(α)＝△ABM の面積+△DCE の面積－(△XYZ+□YEMZ)

＝$2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,(1-\alpha)(1+3\alpha)$

＝$\sqrt{3}\,(3\alpha^2-2\alpha+3)$・・・(答)

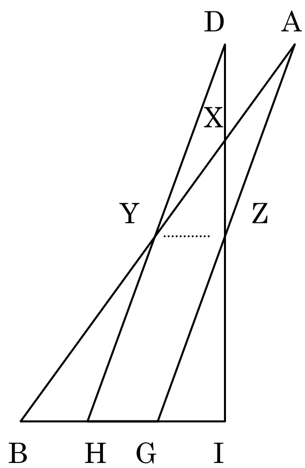
問３　底辺を４等分したので、BG＝HI＝１より

BH＝α×BG＝α　（０＜α＜１）

線分 AB と線分 DI との交点を X

線分 AB と線分 DH との交点を Y

線分 AG と線分 DI との交点を Z とする。



YZ＝HG＝BG－BH＝BG－α×BG＝（１－α）BG＝１－α

△ABG の面積＝△DHI の面積＝BG×DI×$\frac{1}{2}$＝$\sqrt{3}$

△DYZ∽△DHI より YZ : HI＝HG : HI＝１－α ：１

YZ＝(１－α)HI＝１－α

同様に、DZ : DI＝YZ : HI＝１－α ：１

DZ＝(１－α)HI＝$2\sqrt{3}\,(1-\alpha)$

四角形 DYZA は平行四辺形だから、XZ＝$\sqrt{3}\,(1-\alpha)$

△XYZ の面積＝$\frac{1}{2}$×YZ×XZ＝$\frac{1}{2}\times(1-\alpha)\times\sqrt{3}\times(1-\alpha)$

＝$\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\alpha)^2$

$$\mathrm{ZI}=\mathrm{DI}-\mathrm{DZ}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\left(1-\alpha\right)=2\sqrt{3}\,\alpha$$

平行四辺形 YHGZ の面積＝HG×ZI＝ $2\sqrt{3}\,\alpha\left(1-\alpha\right)$

△DHI と△ABG の共通部分の面積

＝△XYZ の面積＋□YHGZ の面積

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\alpha\right)^2+2\sqrt{3}\,\alpha\left(1-\alpha\right)$

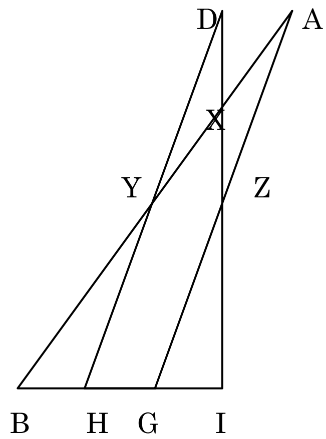
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\alpha\right)\left(1+3\alpha\right)$ ・・・（共通部分の面積）

T(α）

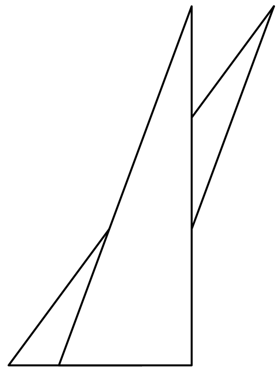
＝△ABG の面積＋△DHI の面積－（共通部分の面積）

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\alpha\right)\left(1+3\alpha\right)$

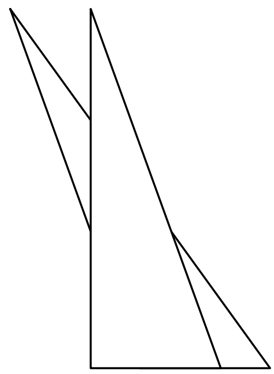
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(3\alpha^2-2\alpha+3\right)$ ・・・（答）



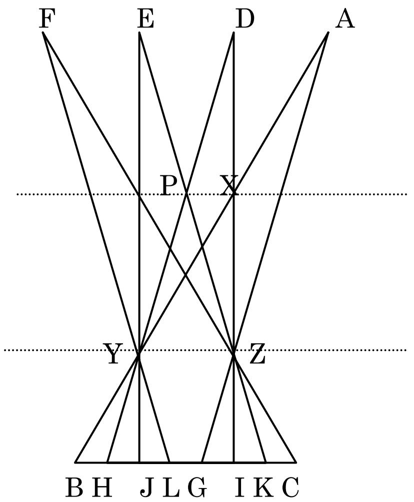
問４　問３の多角形Ｔと面積が等しく合同な多角形をＵとする。（右図）これらのＴとＵを題意のように貼り合わせると下図【Fig-7】であり、T と U の共通部分は【Fig-8】となる。



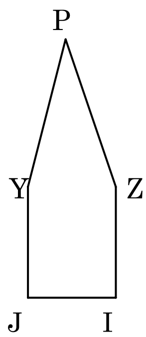
T



U



【Fig-7】



【Fig-8】

ＴとＵの共通部分【Fig-8】の面積を求める。

Ｔ∩Ｕの面積＝△PYZ の面積＋□YJIZ＝△XYZ＋□YHGZ

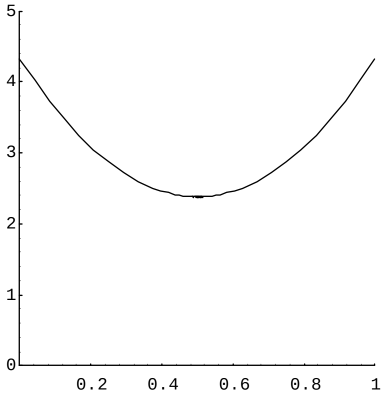
問３より、　$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\alpha\right)\left(1+3\alpha\right)$

求める多角形の面積＝Ｔ(α)×２－Ｔ∩Ｕの面積

$$=\sqrt{3}\left(3\alpha^2-2\alpha+3\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\alpha\right)\left(1+3\alpha\right)$$

これを計算してまとめると、

$$=\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(\alpha^2-\frac{2}{3}\alpha+\frac{5}{9}\right)\cdot\cdot\cdot(答)$$



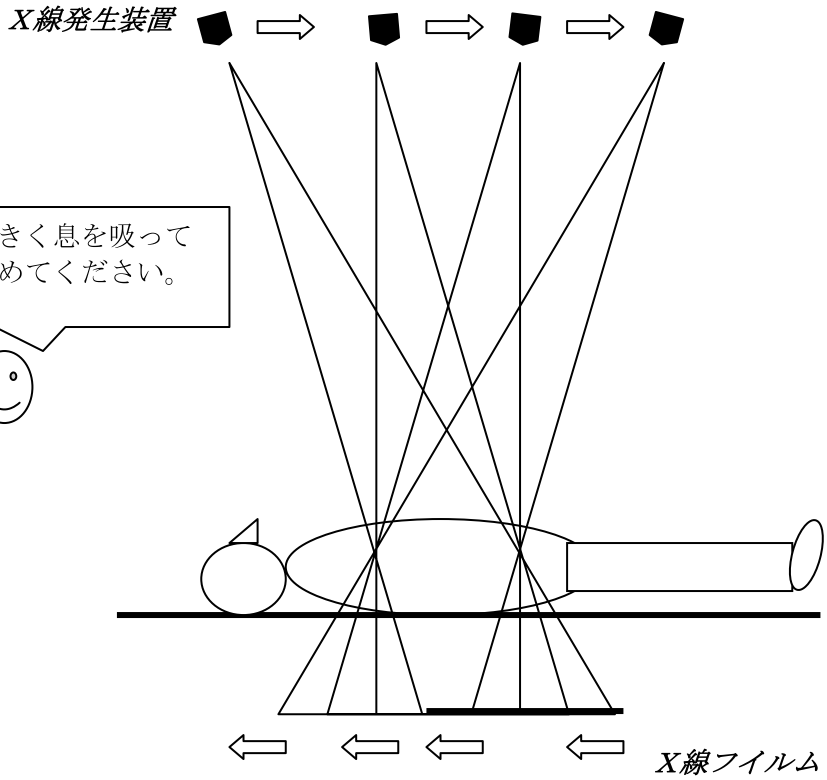
更に、０＜α＜１のときの最小値をもとめよう。

$$=\frac{9\sqrt{3}}{2}\left\{\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right\}$$

これは、単純な２次関数の最小問題なので、

$\alpha=\frac{1}{3}$ のときに最小値 $2\sqrt{3}$ となる。・・・(答)

《発展》この問題では正三角形の底辺を２等分し、そして４等分しました。
更に、これを拡張して考えて、底辺を６等分、８等分、・・・２ｎ等分して、ｎが無限大に接近すると、この面積はいったいどのような値に接近するのでしょうか？
又、実社会において、この考えはどのような方面で人類のために役に立つのでしょうか？
後期の期末試験の勉強で忙しいかもしれませんが、一度考えてみて下さい。



実は、ｎ→∞になると、面積は０に限りなく接近します。（ベシコビッチ集合）
実社会では、医療の分野で画像診断－レントゲン撮影方法の１つで、人体のある一定の深さを撮影する『断層撮影』（上図）に役に立っています。
数学は、あらゆる分野に役に立つ基礎学問です。

（北海道岩見沢東高校　教諭　松本睦郎）