問題３

Descartes（デカルト）の葉線 $x^3+y^3-3xy=0\cdots$① について答えよ。

問１　直線 $y=x\cdots$②と①との交点を求めよ。

問２　①がけっして通らない象限がある。その象限はどこか？その象限を、理由を記して云いなさい。ただし、象限とは座標平面を x 軸、y 軸によって４つの部分に分けたとき、$x>0$ かつ $y>0$ となる部分を第１象限、$x<0$ かつ $y>0$ となる部分を第２象限、$x<0$ かつ $y<0$ となる部分を第３象限、$x>0$ かつ $y<0$ となる部分を第４象限という。

問３　$u=x+y, v=xy$　とおく、①を u,v で表せ。

問４　①は、$x=0$、$y=0$ 以外の整数解をもたないことを示しなさい。

問５　①上の (x,y) は、$x+y+1>0$ を満たすことを示しなさい。

【解答例】

問１　②を①に代入して　$2x^3-3x^2=0$

$$x^2(2x-3)=0$$

ゆえに　$x=0,\dfrac{3}{2}$

問２　①から、$x^3+y^3=3xy\cdots$③

第３象限の点は、x、y ともに負

このとき、③の左辺は負、右辺は正となる

したがって、$x^3+y^3\neq 3xy$

ゆえに、通らない象限は第３象限

問３　$x^3+y^3-3xy=0$

$(x+y)^3-3xy(x+y)-3xy=0$

ゆえに　$u^3-3uv-3v=0$　$\cdots$④

問４　①が $(0,0)$ 以外の整数解をもつこともあるとして

x, y が整数なら、$u = x + y$ 、$v = xy$ より、u 、v も整数

④より、$3v = \dfrac{u^3}{u+1}$ が成立

u と u ＋１は互いに素であるので、$u \neq 0$ のとき、左辺は整数であるのに対して、右辺は分数となるので、左辺≠右辺

したがって、右辺は $u = 0$ 以外は整数とならず、④は $u = v = 0$ 以外の整数解をもたないことになる

$u = x + y, v = xy$ より、①は $x = y = 0$ 以外の解をもたない

問５　（解１）　$x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3xy = 0$$
$$(x+y)^3 + 1 - 1 - 3xy(x+y+1) = 0$$
$$(x+y+1)\{(x+y)^2 - (x+y) + 1\} - 3xy(x+y+1) = 1$$
$$(x+y+1)\{(x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy\} = 1 \quad \cdots⑤$$

ここで、$k = (x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy$ とおく

一般に、任意の x 、y に対して

$$\begin{aligned} k &= (x+y)^2 - (x+y) + 1 - 3xy \\ &= x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 + 1 - 2x + x^2) \\ &= \frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-1)^2 + (1-x)^2\} \geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立ち、$x = y = 1$ のときに等号が成立し、そのとき k の最小値は 0

$x = y = 1$ を①に代入すると

$(左辺) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1 \neq (右辺)$ より、$(1,1)$ は①上にないことがわかる

したがって、$k = \dfrac{1}{2}\{(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2\} > 0$

よって、⑤より、$(x+y+1)k = 1$ として、$k > 0$ だから　$x + y + 1 > 0$

（解２）

２年生では「領域と最大・最小」を用いた解法も考えられる。

$x+y=k\cdots$⑥とおいて①に代入し、$3(k+1)x^2-3k(k+1)x+k^3=0\cdots$⑦

$k=-1$のとき、上式は$-1=0$となって不合理だから$k\neq-1\cdots$⑧ としてよい。

題意により、①、⑥は交点をもつことになるので、⑦は実数解をもつことになる。

したがって、

判別式$\mathrm{D}=9k^2(k+1)^2-12k^3(k+1)\geqq 0$が成立。

これから、 $k^2(k+1)(-k+3)\geqq 0,\ k^2(k+1)(k-3)\leqq 0$ $\therefore\ -1\leqq k\leqq 3$

⑥より、$-1\leqq x+y\leqq 3$ となる。 ⑧より $x+y>-1$ $\therefore x+y+1>0$

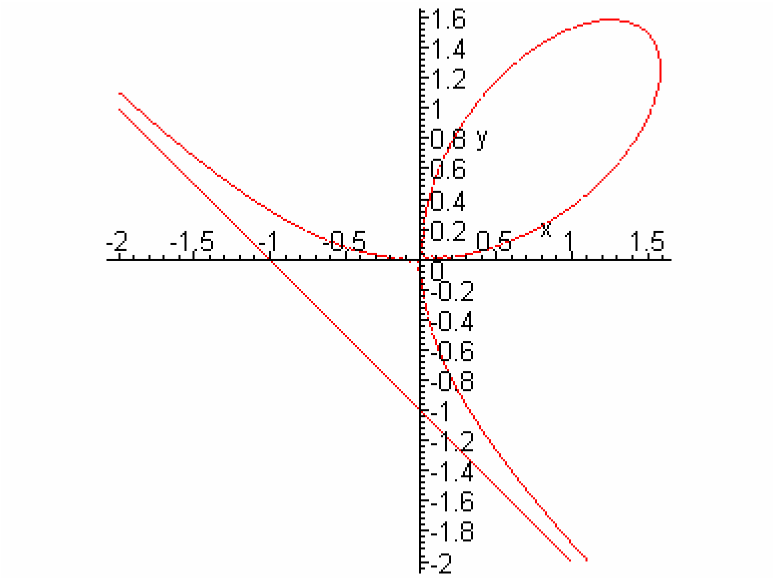
【解説】

問題文にも入れましたが、「デカルトの葉線」と呼ばれる曲線からの出題です。３次曲線で関数は陰関数表示になっていますので、数Ⅲの微積が終了したあたりで出会うことになるかもしれません。ただ、その機会は少ないと思います。面白い形をしているので、いつか出題してみたいと考えておりましたが、数Ｉの範囲では限界があり上のような問題となりました。

式は３次の対称式です（x、yを入れ替えても式に変化がない）、そして３次の項が２つ、２次が１つでの引き算。x、yがもし整数でその値が大きくなれば、片方は２次ですからその差はどんどん大きくなって０になることはありません。したがって、整数解は$x=y=0$以外にないだろうという見通しが立ちます。それが問４です。なお、このことは他の文献でも見たことがなく、問題を作成していく中で発見したものです。

$x+y+1=0$は図のように、曲線の漸近線と呼ばれる直線で、グラフはその上にあります。知ってしまえば当たり前のことですが、グラフが$x\to\pm\infty$で直線$x+y+1=0$に限りなく近づくことを微分を用いなくても示せる、それを問５にしました。皆さんの解答が楽しみです。

下図の曲線が「デカルトの葉線」、直線が $x+y+1=0$ 。もう１本、平行な $y=-x$ を引いてみて下さい、第２、第４象限でその間を曲線部分は通過していることが見えてくるでしょう。同じ x に対する y どうしの距離は１で、どちらの直線も全ての整数値を動き、かつ直線間の y は整数値ではありません。したがって、この部分では整数値をとることはありません。勿論、第１象限でもないことは、図から読みとれると思います。



出力　Ｍａｐｌｅ　Ｖ５

（北海道岩見沢東高等学校　教諭　鈴木雅博）