問題２

実数Nが２以上の自然数nと０以上の整数kを用いて

$N = a \cdot n^{k} + b \cdot n^{k-1} + c \cdot n^{k-2} + \cdots\cdots + d \cdot n + e$ （ただし、$a, b, c, \cdots\cdots, d, e$は整数で、$0 < a < n$ かつ $0 \leqq b, c, \cdots\cdots, d, e < n$ を満たす）で表されるとき、数 $abc\cdots\cdots de$ を実数Nのn進法表示といい、$abc\cdots\cdots de_{(n)}$ で表すこととする。

例えば、$100 = 1 \cdot 3^{4} + 0 \cdot 3^{3} + 2 \cdot 3^{2} + 0 \cdot 3 + 1$ であるから、$100 = 10201_{(3)}$ である。

問１　自然数Nが次のように表されるとき、Nを求めよ。

① $123_{(7)}$　　② $369_{(13)}$

問２　次の数を(ア)3進法、(イ)５進法の２通りで表示せよ。

①　２３４　　②　２００３

問３　上記の定義からわかるように、日常われわれが使っている数は１０進法表示である。
１０進法で表される２桁の自然数について、$25^{2} = 625$ のように２乗しても下２桁が変わらないものは他にあるか。あるとすればそれら全てを求めよ。ないならばその理由を示せ。

問４　１０進法で表される２桁の自然数とその２乗を６進法で表したとき、下２桁が変わらないものは他にあるか、あるとすればそれら全てを求めよ。ないならばその理由を示せ。

配点　問１　３点×２＝６点　　問２　３点×２×２＝１２点
問３　６点　　問４　１６点

着眼点

参加者の多くはn進法について多少の知識は持っていると思われるが、n進法は姿、形を変えて大学入試等で出題されることも多く、これを機会に興味、関心を高め、見

識をより深めてもらいたい。

さて、(1)と(2)はn進法$\leftrightarrow$10 進法の書き換えである。n進法→10 進法については、定義のとおり計算すれば単純な四則演算で書き換えができるので、容易であろう。10 進法→n進法については、次のような計算方法を利用すると書き換えができるのでぜひ覚えておいてほしい。

（例）100 を 3 進法で表す

100÷3	は	33	余り 1	→	第１位（一の位）は　1
33÷3	は	11	余り 0	→	第２位（十の位）は　0
11÷3	は	3	余り 2	→	第３位（百の位）は　2
3÷3	は	1	余り 0	→	第４位（千の位）は　0
1÷3	は	0	余り 1	→	第５位（万の位）は　1

よって、　$100 = 10201_{(3)}$

(3)については、２桁の自然数は 10 から 99 までの高々90 個であることから、全部についてシラミ潰しで調べてもそれほどの労力にはならない。末位だけに着目しても、$0^2 = 0$、$1^2 = 1$、$2^2 = 4$、$3^2 = 9$、$4^2 = 16$、$5^2 = 25$、$6^2 = 36$、$7^2 = 49$、$8^2 = 64$、$9^2 = 81$により、末位が 1、5、6、0 の場合に限られることがわかるから、絞り込むこともできる。しかし、これが「３桁の自然数について」となるとタイヘン。工夫して解かないと手に負えない。そこで、解答例では「N と N^2 とで下２桁が変わらない$\Leftrightarrow$ $N^2 - N$ が 100 で割り切れる」に着目してみた。

(4)は、6 進法で表された数について問う問題。(3)同様、高々90 個の自然数であるからシラミ潰しでもかまわないが、6 進法についての理解が不十分であると、N^2 を 6 進法に直すのが一苦労。実は、(3)が伏線であり、「N と N^2 とで下２桁が変わらない$\Leftrightarrow$ $N^2 - N$ が 100 で割り切れる」を 6 進法に適用するとどこが変わるのかに気づくと、同様にして解けるし、もとの自然数が３桁になっても、6 進法以外のn進法になっても解くことができるだろう。実は、(4)では「10 進法で表される３桁の自然数」として出題したかったが、時間的制約などから「２桁の自然数」とした。参加者諸君にはぜひ挑戦してみてほしい。

$\boxed{\text{解答例}}$

問１　①$123_{(7)} = 1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 3 = 66$

②$369_{(13)} = 3 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13 + 9 = 594$

問２　①(ｱ) $234 = 2\cdot3^4 + 2\cdot3^3 + 2\cdot2^2 + 0\cdot3 + 0$ より　$234 = 22200_{(3)}$

(ｲ) $234 = 1\cdot5^3 + 4\cdot5^2 + 1\cdot5 + 4$ より　$234 = 1414_{(5)}$

②(ｱ) $2003 = 2\cdot3^6 + 2\cdot3^5 + 0\cdot3^4 + 2\cdot3^3 + 0\cdot3^2 + 1\cdot3 + 2$ より

$2003 = 2202012_{(3)}$

(ｲ) $2003 = 3\cdot5^4 + 1\cdot5^3 + 0\cdot5^2 + 0\cdot5 + 3$ より　$2003 = 31003_{(5)}$

問３　２桁の整数を N とすると、

N と N^2 とで下２桁が変わらない $\Leftrightarrow$ $N^2 - N$ が 100 で割り切れる

すなわち、$N(N-1)$ が $2^2\cdot5^2$ の倍数となる N を求めればよい。

ところで、N と $N-1$ は互いに素（1 以外に公約数をもたない）であるので、N または $N-1$ のいずれかが 5^2 の奇数倍(①)、かつ、他方が 2^2 の倍数(②)であることが必要。N は２桁であることと①により、

$N = 25,75$　または　$N-1 = 25,75$

すなわち、

$(N, N-1) = (25,24), (75,74), (26,25), (76,75)$

これらのうち、②を満たすものは、

$(N, N-1) = (25,24), (76,75)$

よって、25 のほかに 76 もある。

問４　２桁の整数を N 、N を 6 進法で表した数を $f(N)$ とすると、

$f(N)$ と $f(N^2)$ とで下２桁が変わらない $\Leftrightarrow$ $f(N^2) - f(N)$ が 100 で割り切れる

$\Leftrightarrow$ $N^2 - N$ が 36 で割り切れる

すなわち、$N(N-1)$ が $6^2 = 2^2\cdot3^2$ の倍数となる N を求めればよい

ところで、N と $N-1$ とは互いに素であるので

ｉ）N または $N-1$ のいずれかが $2^2\cdot3^2$ の倍数である

ⅱ）N または $N-1$ のいずれかが 3^2 の奇数倍(①)、かつ、他方が 2^2 の倍数(②)であること

のいずれかが成り立つことが必要。N は２桁であることから、

ｉ）の場合　$N = 36,72$　または　$N-1 = 36,72$

したがって、$N = 36,37,72,73$

ⅱ）の場合　①により $N = 27,45,63,81,99$　または

$N-1 = 9,27,45,63,81$

すなわち、$(N,N-1)=(27,26),(45,44),(63,62),(81,80),(99,98),$
$(10,9),(28,27),(46,45),(64,63),(82,81)$

これらのうち、②を満たすものは

$$(N,N-1)=(28,27),(45,44),(64,63),(81,80)$$

よって、28、36、37、45、64、72、73、81　の８つ

講評

問１、問２については、「n進法→10 進法」の書き換えと「10 進法→n進法」の書き換えを読み違えた生徒が予想以上に多かった。また、式が正しく得られていても解答を導く段階でミスを犯した答案も少なからずあった（高い能力を持っていると推察できうる生徒にも）。非常に残念なことである。簡単な問題ほど慎重かつ大胆に取り組むよう心がけてほしい。

例：問１①での「$123_{(7)}=1\cdot7^2+2\cdot7+3=65$」といった計算ミス

問２①(ｱ)での「$234=2\cdot3^4+2\cdot3^3+2\cdot3^2+0\cdot3=2220_{(3)}$」といったミス

なお、問２では「$22200_{(3)}$」などとすべきところを単に「22200」などとしたものにも得点を与えた。

問３については、答案を大きく分類すると、『解答例と解説』の『着眼点』に記したように「下１桁に着目する」方法はほぼ共通しており、求める２桁の整数を$10m+n$と表して調べる答案と、可能性のあるものを列挙して実際に計算して調べる答案がほとんどであった。解答例に示したような「N^2-Nが 100 の倍数になる」性質を利用した答案はごく少数であった。

「求める２桁の整数を$10m+n$と表す」方法は中学数学で学習したものであろう。しかし、$(10m+n)^2=100m^2+20mn+n^2$と展開しても、$m$、$n$の値によって下２桁を場合分けする必要があり、かりにnを 1、5、6、0 に限定してもかなり苦労したのではないだろうか。多かったミスは、$n=6$の場合を例示すると、$(10m+6)^2=100m^2+120m+36=100(m^2+m)+10(2m+3)+6$と変形したはよいが、繰り上がりを考慮しなかったため、10 の位を単純に$2m+3$ととらえてしまったケースが挙げられる。

また、下１桁が 1、5、6、0 の４通りの場合について調べるところを、１～３個の場合にとどまった答案が多かった。問題文には「それら全てを求めよ」とあるので、たとえ正解である「76」が発見できても、それで「全て」であることを説明するには

不完全なので減点の対象とした。同様に、単に「76」「$76^2=5776$」とのみ記した答案も、「それが全て」であることの説明が不十分なので減点の対象とした。

一部の受験者には、例に示した$25^2=625$から「整数の２乗」を「平方数の２乗」と読み違えた生徒もいた。落ち着いて題意を読みとってほしい。

なお、「25 以外には存在しない」という結論に達した生徒は、正解として導かれるべき 76 がなぜ脱落してしまったのかの原因を追究してほしい。

問３で正解を導くことのできた生徒は 23 名。ほとんどは２年生だが、1049 番三浦瞬君（札幌北）は１年生ながらしっかりとした答案がかけていた。

問 4 は残念ながら完答者はいなかった。誤答の中で多かったのは、$44^2=1936=12544_{(6)}$のように、「もとの整数」の下２桁と「もとの整数を２乗して６進法で表した数」の下２桁を比較したものであった（題意は「$28=\underline{44}_{(6)}$、$28^2=784=33\underline{44}_{(6)}$」のような数を見つけることである）。例示がなかったために読み違えたのであろうが、参考までに上記（誤答）の場合の正解は 44 のほかには$41^2=1681=11441_{(6)}$しかない。読み違えたとしても、「41 と 44」を導くことのできた受験者はいなかった。

さて、読み違えずに取り組んだ受験者でも、２桁の整数を$10m+n$とおいたもののなすすべがなくなり、曖昧な論議で終わらせるものが多かった。この問題では６進法での比較になることをふまえると、$10m+n$ではなく$36k+6m+n$（または、せめて$6m+n$）とおけば解決の糸口が見いだせることに気づいてほしかった。なお、この場合の解法は解答例に掲載していない別解として文末に示しておく。

ごく少数であるが、もとの整数をNとしたとき、「N^2-Nが 36 の倍数」であることを利用すればよいことに気づいた受験者がいた。場合分けが不完全で８個の解全てを見つけることができずに終わったのが残念である。

問４では正解を導くには至らなかったものの、88 番八木渉君（函館中部）、1027 番小田克君（札幌西）の答案は着眼点が鋭いものであった。　また、たった１名、「合同式」を利用して解こうとした受験者 1009 番山村裕一君（北嶺）がいた。「合同式」は高校の教科書には記載されていないが、高校生向けの参考書や雑誌などには掲載しているものもある。不十分な解答ではあったが、その意欲は多いに評価できる。さらに研鑽を重ねてほしい。

問４　別解

$99=243_{(6)}$ であるから、もとの整数は $N=36k+6m+n$ （k,m,n は 0 以上 5 以下の整数。ただし、$10\leqq N\leqq 99$ ）と表せる。このとき、N を６進法で表したときの末位の数 n は、N を 6 で割ったときの余りに等しいので、N は $6m$ 、$6m+1$、$6m+2$、$6m+3$、$6m+4$、$6m+5$ のいずれかの形で表すことができる。

$(6m)^2=6\cdot 6m$ 、$(6m+1)^2=6(6m^2+2m)+1$、
$(6m+2)^2=6(6m^2+4m)+4$、$(6m+3)^2=6(6m^2+6m+1)+3$、
$(6m+4)^2=6(6m^2+8m+2)+4$ 、$(6m+5)^2=6(6m^2+10m+4)+1$ であるから、題意をみたす可能性があるのは、$n=0,1,3,4$ の場合に限られる。

ｉ） $n=0$ の場合

$N=36k+6m+0$ と $N^2=36(36k^2+12km+m^2)+6\cdot 0+0$ の下２桁が一致するのは $m=0$ のとき。よって、$N=36k$ 。$10\leqq N\leqq 99$ より $N=36,72$

ⅱ） $n=1$ の場合

$N=36k+6m+1$ と $N^2=36(36k^2+12km+m^2+2k)+6\cdot 2m+1$ の下２桁が一致するのは $m=2m,2m-6,2m-12,\cdots$ のとき。m は 0 以上 5 以下であるから、$m=0$。よって、$N=36k+1$。$10\leqq N\leqq 99$ より $N=37,73$

ⅲ） $n=3$ の場合

$N=36k+6m+3$ と $N^2=36(36k^2+12km+m^2+6k+m)+6\cdot 1+3$ の下２桁が一致するのは $m=1$ のとき。よって、$N=36k+9$。$10\leqq N\leqq 99$ より $N=45,81$

ⅳ） $n=4$ の場合

$N=36k+6m+4$ と　$N^2=36(36k^2+12km+m^2+8k+m)+6(2m+2)+4$ の下２桁が一致するのは $m=2m+2,2m+2-6,2m+2-12,\cdots$ のとき。m は 0 以上 5 以下であるから、$m=4$。よって、$N=36k+28$。$10\leqq N\leqq 99$ より $N=28,64$

ゆえに、ｉ～ⅳの結果から、$N=28,36,37,45,64,72,73,81$ の８個

（北海道札幌白石高等学校　教諭　平間順宏）