問題１　次の各小問に答えよ。

問１　正六角形で、互いに平行になる対角線の組はいくつあるか？

問２　正七角形で、互いに平行になる対角線の組はいくつあるか？

問３　正 n 角形で、互いに平行になる対角線の組はいくつあるか？
答えを導いた道筋を明記せよ。

問４　正六角形の対角線の中で、互いに直交して、交点が多角形の内部にある対角線の組はいくつあるか？

問５　正七角形の対角線の中で、互いに直交して、交点が多角形の内部にある対角線の組はいくつあるか？

問６　正 n 角形の対角線の中で、互いに直交して、交点が多角形の内部にある対角線の組はいくつあるか？答えを導いた道筋を明記せよ。

【着眼点】

互いに平行になる対角線の組を探す問では、まず、正偶数三角形と正奇数三角形では、ある辺の向かい側の形が異なることに着目する。そして、次に、辺に着目して、その辺に平行なる対角線の組を求めていく方法と、頂点に着目して、そこから引ける対角線に互いに垂直になる対角線の組を求めてゆくことから解答が導かれると思います。

互いに垂直になる対角線の組を探す問題では、前問で使った方法を利用して、解答が導かれると思われます。もちろん、これとは別の着眼点に立つ解答を期待しています。

【採点基準】

問１、問２、問４、問５は各３点　　問３、問６は各１４点です。

【解答例】

問１　数え上げて３組

問２　数え上げて７組

問３（解答例）

①　n＝１，２のとき、正多角形は成立しない。

②　n＝３のとき、正多角形は成立するが、対角線は存在しない。

③　n＝４，５のとき、正多角形は成立するが、互いに平行になる対角線の組は存在しない。

④　n＝６のとき、上記より３組。

⑤　n≧７のとき、対角線左右の辺の数を考えることによって、どの対角線についても、それに平行な辺が存在する。

（nが奇数のとき）

ある辺を元にして、その向かい側は、辺ではなく、頂点になっている。そして、この辺に平行なる対角線は、$\dfrac{n-3}{2}$ 本ある。これらより２本とる組み合わせだけ、平行になる組がある。そして、それが辺の数だけ存在するので、

$$n \cdot {}_{\frac{n-3}{2}}\mathrm{C}_2 = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-5}{2} = \frac{n(n-3)(n-5)}{8}$$

（nが偶数のとき）

対角線の左右で、奇数の辺に分けるとき、この対角線に平行な辺を元にして、その向かい側は、平行な辺である。ゆえに、ここに$\dfrac{n-4}{2}$本の互いに平行な対角線が存在する。これらより２本とる組み合わせだけ、平行になる組がある。そして、それらが、辺の数のちょうど半分だけ存在する。

次に、対角線の左右で偶数辺に分けるとき、ある頂点に着目する。その頂点の向かい側も頂点である。すると、それらの頂点を結ぶ線は、この正多角形を二等分する。そして、その二等分線の一方の側には、$\dfrac{n-2}{2}$個の頂点が存在し、この二等分線に垂直な$\dfrac{n-2}{2}$本の互いに平行な線が引ける。

それらより、２本とる組み合わせだけ、平行になる組がある。そして、それらが、頂点の数のちょうど半分だけ存在する。ゆえに、

$$\frac{n}{2} \cdot \left\{ {}_{\frac{n-4}{2}}C_2 + {}_{\frac{n-2}{2}}C_2 \right\} = \frac{n(n-4)^2}{8}$$

問４　数え上げて６組

問５　数え上げて０組

問６　（解答例）

①　n＝１，２のとき、正多角形は成立しない。

②　n＝３のとき、正多角形は成立するが、対角線は存在しない。

③　n＝４のとき、１組存在する。

④　n＝５のとき、正多角形は成立するが、互いに直交する対角線は存在しない。

⑤　$n \geqq 6$でnが偶数のとき

（Ⅰ）$n=4m$のとき（$m \geqq 2$の整数）

ある辺の向かい側も、その辺に平行な辺になっている。よって、これら２辺を

水平においたとき、横方向に互いに平行な$\dfrac{n-4}{2}=2(m-1)$本の対角線が引ける。そして、これらの対角線に対し垂直方向に$2(m-1)$本の対角線が引ける。そして、内部に交点をもつものは、中心に近い縦方向の対角線から、$2m-2$本、$2m-4$本、$2m-6$本、…、４本、２本、となり、これが左右対称に存在するので、それらの組の数は、$2m(m-1)$個存在する。そして、それが４分の１周分存在するので、

$m\cdot 2m\cdot(m-1)=$（$2m^3-2m^2$）個存在する…①

次に、ある頂点の向かい側も頂点になっている。よって、これら２頂点を結ぶ対角線に平行な対角線は$\dfrac{4m-2}{2}=2m-1$本引ける。また、これらの対角線に垂直方向の対角線も$2m-1$本引ける。これらの対角線の中で、内部に交点をもつものは、円の中心を通る対角線には$2m-1$本の対角線が直交する。そして、それに平行で、それ以外の対角線には、$2m-3$本、$2m-5$本、…、３本、１本、の対角線が直交している。

そこで、それらの交点の数は、

$(2m-1)+2\{(2m-3)+(2m-5)+\cdots\cdots+3+1\}=2m^2-2m+1$　となっている。

そして、これら４分の１周分存在するので、（$2m^3-2m^2+m$）個存在する。

①と合わせて、$4m^3-4m^2+m=m(2m-1)^2=\dfrac{n}{4}(\dfrac{n}{2}-1)^2=\dfrac{n(n-2)^2}{16}$個となる。

（Ⅱ）$n=4m+2$のとき（$m\geqq 1$）

ある辺の向かい側も、その辺に平行な辺になっている。よって、これら２辺を水平においたとき、横方向に互いに平行な$\dfrac{n-4}{2}=2m-1$本の対角線がひける。そして、それらで内部に交点をもつものは、中心に近い縦方向の対角線から、$2m-1$本、$2m-3$本、…、３本、１本、となり、これが左右対称に存在するので、それらの組は、$2m^2=\dfrac{(n-2)^2}{8}$　個存在する。そして、これが半周分存在するので、$\dfrac{n(n-2)^2}{16}$個となる。この場合、頂点に注目して考えた場合も、上記に含まれているので、組は上記だけ存在する。

（Ⅲ）$n=2m+1$のとき

$n=2m+1$の正n角形の一つの外角は、$\dfrac{360^\circ}{2m+1}$になる。

もし、正多角形の内部で互いに直交する対角存在するなら、$\dfrac{360^\circ}{2m+1}$のある整数倍が、$\dfrac{360^\circ}{n}k=90^\circ$、$270^\circ$でなくてはならない。しかし、$\dfrac{k}{n}=\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}$となる奇数$n$は存在しない。ゆえに、正奇数多角形のとき、内部で互いに直交する対角線は存在しない。

$\boxed{\text{採点を終えて}}$　（講評）

1　だいたいの受験生は、解答途中で、自分独自に文字などを設定していますが、それらの文字などは、最終解答に残さないようにしてください。最終解答は、あくまで問題で与えられた文字のみで表記してください。

2　何人かの受験生は、問３や問６で数列を使って解答しようとしていました。方法としては、当然一度は考えてみるべきものとは思いますが、この問題の場合には、正多角形についての扱いなので、数学的帰納法の証明がかなり難しいものになると思われます。勿論、その方向で試してみることは必要であろうかとは思います。

3　問３と問６では、解答として、$n=1$，２，３，４，５，６の各々と$n\geqq 7$とに分けて記述すべきかと思われますが、この$n=1$，２，３，４，５，６について記述していた受験生は少ない結果でした。

4　問３と問６の両方ともに完全解答できていた受験生はいませんでした。かなり論述する力が必要であろうと思われますし、他の問題に取り組む時間も当然必要ですので、時間的に厳しかったと思われます。しかし、その中でも、1008番（北嶺）山崎君、1057番（札幌北）岡田君、132番（函館東）高棹君、1036番（札幌藻岩）尾崎君、1024番（札幌西）別宮君、1019番（札幌南）佐藤君、……など、高い得点を得ていました。

5　問１問２問４問５や問３問６の$n=1$，２，３，４，５，６などについて記入しておけば、それだけでも２０点と、半分の点数を稼ぐことができます。わからないとか、解答に自信がないと思っている人でも、そこそこの点数を取ることができるように設定してありますので、決して諦めずにしっかり取り組んでください。

（北海道栗山高等学校　教諭　山崎昌典）