

第 16 回
北海道高等学校数学コンテスト

問 題

平成10年 1 月12日

9 時00分～12時30分 (210分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

問題 1 全体集合 U の部分集合 A, B に対し, 集合 $A \nabla B$ を

$$A \nabla B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

で定義します。ただし, $\overline{A}$ は, U における A の補集合のことで, U の要素であって, A の要素でないものの集合を表す。

次の問に答えなさい。

問 1. 次の集合を求めなさい。ただし, ϕ は空集合とする。

(1) $A \nabla \phi$

(2) $A \nabla U$

(3) $A \nabla A$

問 2. 次の等式が成り立つことを示しなさい。

(4) $A \nabla B = B \nabla A$

(5) $(A \nabla B) \nabla C = A \nabla (B \nabla C)$

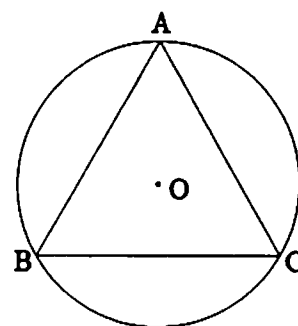
問 3. 2つの集合 A, B に対し,

$$A \nabla X = B$$

となる集合 X を, A, B で表しなさい。

問題 2 正三角形 ABC とその外接円の中心を O とする。

問 1. 中心 O を通り, 辺 AB に平行な直線を, 解答用紙に書き込みなさい。



問 2. 上の直線と, 頂点 A のない方の弧 BC との交点を D とする。線分 CD の延長上に, 長さが $DE = DB$ となるように点 E をとる。点 D と点 E を解答用紙に書き込みなさい。

問 3. 長さについて, $AD = BD + DC$ であることを証明しなさい。

問 4. 外接円の半径が $\sqrt{2}$ であるとき, 線分 AD の長さを求めなさい。

問題 3 n が自然数のとき、 $f(n)$ は n のすべての約数（1 と n を含む）の和を表すこととする。

次の問に答えなさい

$$\text{例： } f(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$$

問 1. $f(12)$ を求めなさい

問 2. $f(2^{k-1})$ を求めなさい。ただし、 k は自然数である。

問 3. m, n が互いに素な自然数であるとき、

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

が成り立つことを説明しなさい。

問 4. $f(2000)$ を求めなさい。

問 5. $f(n) = 2n$ を満たす n を完全数、

$f(n) < 2n$ を満たす n を不足数、

$f(n) > 2n$ を満たす n を過剰数と言っている。

次の数は完全数、不足数、過剰数のいずれになるか答えなさい。

(1) $n = p^{k-1}$ (p は素数、 k は自然数) のとき。

(2) $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ (k は 2 以上の自然数) とし、 $2^k - 1$ が素数であるとき。

問題 4 赤い花と白い花の 2 種類のどちらかが咲く一年草 F があり、花の色は次のような規則で遺伝する。

花の色に関する遺伝子は A と a の 2 つであり、一年草 F のそれぞれは AA, Aa, aa のいずれかの遺伝子の組み合わせ（遺伝子型）を持っている。AA, Aa の遺伝子型を持つ個体は赤い花を咲かせ、aa の遺伝子型を持つ個体は白い花を咲かせる。それぞれの個体は交配によって次の世代に遺伝子を伝えるが、このとき子は二つの親からそれぞれの遺伝子を同じ確率で受け継ぐものとする。

たとえば、二つの親がともに AA の遺伝子型を持つ場合、AA 型の子しか生まれない。（AA 型の子が生まれる確率 1, Aa, aa の型の子が生まれる確率 0 である。）また、二つの親がともに Aa の遺伝子型を持つ場合、生まれる子は AA, Aa, aa のいずれもあり得る。それぞれの確率は AA の確率 $\frac{1}{4}$, Aa の確率 $\frac{1}{2}$, aa の確率 $\frac{1}{4}$ である。

このとき、次の問に答えなさい。

問 1. AA と Aa, AA と aa, Aa と aa, aa と aa から生まれる子の、それぞれについて、あり得る遺伝子型とその場合の確率を求めなさい。

さらに、一年草 F の個体数は非常に大きく、突然変異は起こらない。また、この一年草の交配は無作為に行われるものとする。

問 2. ある年に遺伝子型 AA, Aa, aa を持つ一年草 F の個体数の割合が 1 : 3 : 1 であったとする。このとき、交配の結果生まれる次の年の AA, Aa, aa の個体数の割合を求めなさい。また、赤い花と白い花の割合も求めなさい。

問 3. 問 2 と同じ設定で次の次の年の AA, Aa, aa の個体数の割合を求めなさい。

問 4. ある年に一年草 F について、AA, Aa, aa の個体数の割合が $x : y : z$ で存在したとする。（ただし、 $x + y + z = 1$ ）。次の年の AA, Aa, aa の個体数の割合を求めなさい。

問 5. 問 4 と同じ設定で、次の次の年の AA, Aa, aa の個体数の割合を求めなさい。また、このことからどんなことが予想されるかも書きなさい。

問題5 関数 $f(x)$ を $f(x) = ax(1-x)$ ($0 \leq x \leq 1$, a は正の定数) と定める。
このとき、次の問に答えなさい。

問1. $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $x \geq ax(1-x)$ を満たす最大の正の数 a の値を求めなさい。

問2. $1 < a \leq 2$ とする。直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ との交点で x 座標が正であるものの x 座標を p とする。このとき、 $0 < t < p$ なる任意の t に対して、常に

$$t < f(t) < p$$

が成り立つことを示しなさい。

問3. $a > 3$ とする。直線 $y = x$ と曲線 $y = f(f(x))$ との交点で、直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ との交点でない点の x 座標を q, r ($q < r$) とする。

q, r を解とする2次方程式を、 a, x を用いて表しなさい。

問4. 問3の q, r に対して、 $r = f(q)$ となることを示しなさい。

平成 9 年度（平成10年 1 月12日実施）

第 16 回 北海道高等学校数学コンテスト

解 答 と 解 説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

全体集合 U の部分集合 A, B に対し、集合 $A \nabla B$ を

$$A \nabla B = (A \cap B) \cup (\overline{A \cap B})$$

で定義します。ただし、 $\overline{A}$ は、 U における A の補集合のことで、 U の要素であって、 A の要素でないものの集合を表す。

次の問に答えなさい。

問 1. 次の集合を求めなさい。ただし、 ϕ は空集合とする。

- (1) $A \nabla \phi$
- (2) $A \nabla U$
- (3) $A \nabla A$

問 2. 次の等式が成り立つことを示しなさい。

- (4) $A \nabla B = B \nabla A$
- (5) $(A \nabla B) \nabla C = A \nabla (B \nabla C)$

問 3. 2つの集合 A, B に対し、

$$A \nabla X = B$$

となる集合 X を、 A, B で表しなさい。

着眼点

集合の演算に関する問題です。問 1 は易しく、(2) は U が単位元、(3) は A 自身が A の逆元であることを示しています(もちろん、この演算 ∇ に関してです。) また、(4)、(5) のように、交換法則と結合法則が成り立つ。このことをうまく使って問 3 を解いてほしい。

解答例

$$\begin{aligned} \text{問 1. (1)} \quad A \nabla \phi &= (A \cap \phi) \cup (\overline{A \cap \phi}) \\ &= \phi \cup (\overline{A \cap U}) \\ &= \phi \cup \overline{A} \\ &= \overline{A} \quad (\text{答}) \quad A \nabla \phi = \overline{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad A \nabla U &= (A \cap U) \cup (\overline{A \cap U}) \\ &= A \cup (\overline{A \cap \phi}) \\ &= A \cup \phi \\ &= A \quad (\text{答}) \quad A \nabla U = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad A \nabla A &= (A \cap A) \cup (\overline{A \cap A}) \\ &= A \cup \overline{A} \\ &= U \quad (\text{答}) \quad A \nabla A = U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{問 2. (4)} \quad A \nabla B &= (A \cap B) \cup (\overline{A \cap B}) \\ &= (B \cap A) \cup (\overline{B \cap A}) \\ &= B \nabla A \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad (A \nabla B) \nabla C &= \{(A \nabla B) \cap C\} \\ &\quad \cup \{(\overline{A \nabla B}) \cap \overline{C}\} \\ &= \{(A \cap B) \cup (\overline{A \cap B})\} \cap C \\ &\quad \cup \{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cup B})\} \cap \overline{C} \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A \cap B} \cap C) \\ &\quad \cup \{(\overline{A \cap B}) \cup (A \cap \overline{B})\} \cap \overline{C} \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A \cap B} \cap C) \\ &\quad \cup (\overline{A \cap B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \end{aligned}$$

上の式は、 A, B, C に関して対称であるから、 $(B \nabla C) \nabla A$ も同様に变形できて、

$$(A \nabla B) \nabla C = (B \nabla C) \nabla A$$

となる。したがって、(4)より、

$$(A \nabla B) \nabla C = A \nabla (B \nabla C)$$

(証明終)

問 3. $A \nabla X = B$ より、

$$A \nabla (A \nabla X) = A \nabla B$$

$$(5) \text{より、} (A \nabla A) \nabla X = A \nabla B$$

$$(3) \text{より、} U \nabla X = A \nabla B$$

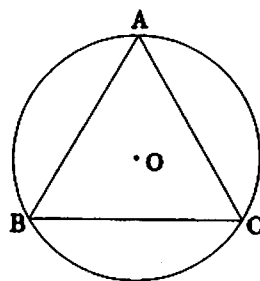
$$(4) \text{より、} X \nabla U = A \nabla B$$

$$(2) \text{より、} X = A \nabla B$$

$$(\text{答}) \quad X = A \nabla B$$

2

正三角形 ABC と
その外接円の中心を
 O とする。



問 1. 中心 O を通
り、辺 AB に
平行な直線
を、解答用紙
に書き込みなさい。

問 2. 上の直線と、頂点 A のない方の弧 BC と
の交点を D とする。線分 CD の延長上に、
長さが $DE = DB$ となるように点 E をとる。
点 D と点 E を解答用紙に書き込みなさい。

問 3. 長さについて、 $AD = BD + DC$ である
ことを証明しなさい。

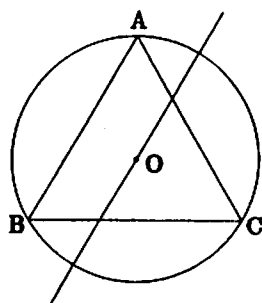
問4. 外接円の半径が $\sqrt{2}$ であるとき、線分ADの長さを求めなさい。

着眼点

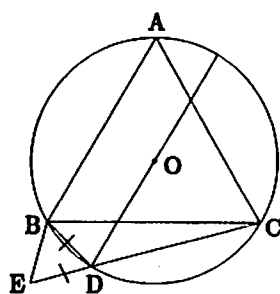
円周角の性質と二等辺三角形の性質がうまく使えるかどうかポイント。

解答例

問1



問2



問3. $\triangle ABD \equiv \triangle CBE$ を示そう。

$\angle BAD = \angle BCE$ (円周角),

$\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ$ (円周角)

$\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$ (円周角)

よって,

$$\angle BDE = 180^\circ - \angle ADB - \angle ADC = 60^\circ$$

$\triangle DBE$ は、二等辺三角形だから、

$$\angle DBE = \angle DEB = 60^\circ,$$

$\triangle DBE$ は、正三角形となる。

以上から、

$$AB = CB, \quad BD = BE,$$

$$\angle ABD = \angle CBE$$

故に、 $\triangle ABD \equiv \triangle CBE$ (二辺夾角相等)

よって、 $AD = EC = BD + DC$

問4. $\angle DOC = 90^\circ$ だから、

$\triangle ODC$ は直角二等辺三角形。

よって、 $DC = 2$

$$\angle BOD = 120^\circ - \angle DOC = 30^\circ$$

余弦定理から、

$$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2OB \cdot OD \cos$$

$$\angle BOD$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$$

よって、 $BD > 0$ だから、 $BD = \sqrt{3} - 1$

問3より、

$$AD = BD + DC = \sqrt{3} - 1 + 2 = 1 + \sqrt{3}$$

3

n が自然数のとき、 $f(n)$ は、 n のすべての約数 (1 と n を含む) の和を表すこととする。次の間に答えなさい。

$$\text{例: } f(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$$

問1. $f(12)$ を求めなさい。

問2. $f(2^{k-1})$ を求めなさい。ただし、 k は自然数である。

問3. m, n が互いに素な自然数であるとき、 $f(mn) = f(m)f(n)$ が成り立つことを説明しなさい。

問4. $f(2000)$ を求めなさい。

問5. $f(n) = 2n$ を満たす n を完全数、 $f(n) < 2n$ を満たす n を不足数、 $f(n) > 2n$ を満たす n を過剰数と言っている。

次の数は完全数、不足数、過剰数のいずれになるか答えなさい。

(1) $n = p^{k-1}$ (p は素数、 k は自然数) のとき。

(2) $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ (k は2以上の自然数) とし、 $2^k - 1$ が素数であるとき。

着眼点

問2 等比数列の和の公式を用いる。

問3 m の約数と n の約数も互いに素である。

問4、問5 は問3 を用いる。

p を素数とすると、 $M_p = 2^p - 1$ が素数ならば、 M_p をメルセンヌ数と言っている。

解答例

$$\text{問1. } f(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

$$(\text{答}) f(12) = 28$$

$$\text{問2. } f(2^{k-1}) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$$

$$= \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1$$

$$(\text{答}) f(2^{k-1}) = 2^k - 1$$

問3. mn の約数 k は, m の約数 k_1 と n の約数 k_2 の積で表される。 m, n が互いに素であるから k_1, k_2 は k によってただ1組決まる。よって, mn の約数の和は, m の約数の和と n の約数の和の積で表される。(説明終)

$$\begin{aligned}\text{問4. } f(2000) &= f(2^4 \times 5^3) \\ &= f(2^4) \cdot f(5^3) \quad (\text{問3より}) \\ &= \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \times \frac{5^4 - 1}{5 - 1} \\ &= 31 \times 156 = 4836 \\ (\text{答}) \quad f(2000) &= 4836\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{問5. (1) } f(p^{k-1}) - 2p^{k-1} &= \frac{p^k - 1}{p - 1} - 2p^{k-1} \\ &= \frac{p^k - 1 - 2p^{k-1}(p - 1)}{p - 1} \\ &= \frac{p^k + 2p^{k-1} - 1}{p - 1} \\ &= \frac{-p^{k-1}(p - 2) - 1}{p - 1} < 0\end{aligned}$$

(答) よって, 不足数である。

(2) 2^{k-1} と $2^k - 1$ は互いに素である。

$$\begin{aligned}f(n) &= f(2^{k-1} \cdot (2^k - 1)) \\ &= f(2^{k-1}) \cdot f(2^k - 1) \\ &= (2^k - 1) \{ (2^k - 1) + 1 \} \\ &= (2^k - 1) \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) \\ &= 2n\end{aligned}$$

(答) よって, 完全数である。

4

赤い花と白い花の2種類のどちらかが咲く一年草Fがあり, 花の色は次のような規則で遺伝する。

花の色に関する遺伝子はAとaの2つであり, 一年草FのそれぞれはAA, Aa, aaのいずれかの遺伝子の組み合わせ(遺伝子型)を持っている。AA, Aaの遺伝子型を持つ個体は赤い花を咲かせ, aaの遺伝子型を持つ個体は白い花を咲かせる。それぞれの個体は交配によって次の世代に遺伝子を伝えるが, このとき子は

二つの親からそれぞれの遺伝子を同じ確率で受け継ぐものとする。

たとえば, 二つの親がともにAAの遺伝子型を持つ場合, AA型の子しか生まれない。(AA型の子が生まれる確率1, Aa, aaの型の子が生まれる確率0である。)また, 二つの親がともにAaの遺伝子型を持つ場合, 生まれる子はAA, Aa, aaのいずれもあり得る。それぞれの確率はAAの確率 $\frac{1}{4}$, Aaの確率 $\frac{1}{2}$, aaの確率 $\frac{1}{4}$ である。

このとき, 次の問に答えなさい。

問1. AAとAa, AAとaa, Aaとaa, aaとaaから生まれる子の, それぞれについて, あり得る遺伝子型とその場合の確率を求めなさい。

さらに, 一年草Fの個体数は非常に大きく, 突然変異は起こらない。また, この一年草の交配は無作為に行われるものとする。

問2. ある年に遺伝子型AA, Aa, aaを持つ一年草Fの個体数の割合が1:3:1であったとする。このとき, 交配の結果生まれる次の年のAA, Aa, aaの個体数の割合を求めなさい。また, 赤い花と白い花の割合も求めなさい。

問3. 問2と同じ設定で次の次の年のAA, Aa, aaの個体数の割合を求めなさい。

問4. ある年に一年草Fについて, AA, Aa, aaの個体数の割合が $x:y:z$ で存在したとする。(ただし, $x+y+z=1$)。次の年のAA, Aa, aaの個体数の割合を求めなさい。

問5. 問4と同じ設定で, 次の次の年のAA, Aa, aaの個体数の割合を求めなさい。また, このことからどんなことが予想されるかも書きなさい。

着眼点

遺伝の問題に確率を用います。メンデル以来, 遺伝の計算に確率を用いるのはどの生物の教科書にも

載っているが、説明が長くなるので数学の問題としては扱いづらい感がある。せめて時間に余裕のある数学コンテストではと思って出題しました。生物を習っている人にとっては易しすぎる問題かもしれませんが、習っていない人でもわかるように説明を詳しくしています。

ただ、問題の中に条件つき確率（数学B）の知識を必要とする処があります。今回敢えてそれを出題したのは、”ある現象の起こり具合が、平均的にはわかっている、状況によって変わっていく”場合が現実の世界では多いということを知って欲しかったからです。単に確率と言っても、考える場面によっていろいろな変化をしているのです。

解答例は、確率の計算を直接には使わない方法で示す。

解答例

問1.

	A	A
A	AA	AA
a	Aa	Aa

	A	A
a	Aa	Aa
a	Aa	Aa

	A	a
a	Aa	aa
a	Aa	aa

	a	a
a	aa	aa
a	aa	aa

よって、(AAの確率, Aaの確率, aaの確率)の形でかくと、

AAとAaの場合、 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

AAとaaの場合、 $(0, 1, 0)$

Aaとaaの場合、 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

aaとaaの場合、 $(0, 0, 1)$

問2.

	A	A	3A	3a	a	a
A	AA	AA	3AA	3Aa	Aa	Aa
A	AA	AA	3AA	3Aa	Aa	Aa
3A	3AA	3AA	9AA	9Aa	3Aa	3Aa
3a	3Aa	3Aa	9Aa	9aa	3aa	3aa
a	Aa	Aa	3Aa	3aa	aa	aa
a	Aa	Aa	3Aa	3aa	aa	aa

故に、AA, Aa, aaの個体数の比は、25 : 50 : 25 = 1 : 2 : 1となり、

また、赤い花と白い花の比は、3 : 1である。

問3

	A	A	2A	2a	a	a
A	AA	AA	2AA	2Aa	Aa	Aa
A	AA	AA	2AA	2Aa	Aa	Aa
2A	2AA	2AA	4AA	4Aa	2Aa	2Aa
2a	2Aa	2Aa	4Aa	4aa	2aa	2aa
a	Aa	Aa	2Aa	2aa	aa	aa
a	Aa	Aa	2Aa	2aa	aa	aa

故に、AA, Aa, aaの個体数の比は、16 : 32 : 16 = 1 : 2 : 1となる。

問4.

	xA	xA	yA	ya	za	za
xA	x^2AA	x^2AA	$xyAA$	$xyAa$	$zxAa$	$zxAa$
xA	x^2AA	x^2AA	$xyAA$	$xyAa$	$zxAa$	$zxAa$
yA	$xyAA$	$xyAA$	y^2AA	y^2Aa	$yzAa$	$yzAa$
ya	$xyAa$	$xyAa$	y^2Aa	y^2aa	$yzaa$	$yzaa$
za	$zxAa$	$zxAa$	$yzAa$	$yzaa$	z^2aa	z^2aa
za	$zxAa$	$zxAa$	$yzAa$	$yzaa$	z^2aa	z^2aa

故に、AA, Aa, aaの個体数の比は、

$$(4x^2 + 4xy + y^2) : (2y^2 + 4xy + 4yz + 8zx)$$

$$: (4z^2 + 4yz + y^2) \text{ となる。}$$

$$(4x^2 + 4xy + y^2) + (2y^2 + 4xy + 4yz + 8zx) + (4z^2 + 4yz + y^2)$$

$$= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8xy + 8yz + 8zx$$

$$= 4(x + y + z)^2 = 4$$

だから、求める比は、4で割って、

$$\frac{(2x + y)^2}{4} : \frac{(2x + y)(y + 2z)}{2} :$$

$$\frac{(y + 2z)^2}{4} \text{ となる。}$$

問5. 問4で求めた比の式をもう一度使う。

求める比を

$$x' : y' : z' \quad (x' + y' + z' = 1) \text{ とする。}$$

$$x' = \frac{\left\{ 2 \frac{(2x + y)^2}{4} + \frac{(2x + y)(y + 2z)}{2} \right\}^2}{4}$$

$$y' = \frac{\left\{ 2 \frac{(2x + y)^2}{4} + \frac{(2x + y)(y + 2z)}{2} \right\} \times 2}{2}$$

$$\left\{ \frac{(2x + y)(y + 2z)}{2} + 2 \frac{(y + 2z)^2}{4} \right\}$$

$$z' = \frac{\left\{ \frac{(2x+y)(y+2z)}{2} + 2 \frac{(y+2x)^2}{4} \right\}^2}{4}$$

よって、

$$x' = \frac{(2x+y)^2}{4}, \quad y' = \frac{(2x+y)(y+2z)}{2},$$

$$z' = \frac{(y+2z)^2}{4}$$

故に、比は、問4と変わらない。その後も同

5

関数 $f(x)$ を $f(x) = ax(1-x)$ ($0 \leq x \leq 1$, a は正の定数) と定める。

このとき、次の問に答えなさい。

問1. $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $x \geq ax(1-x)$ を満たす最大の正の数 a の値を求めなさい。

問2. $1 < a \leq 2$ とする。直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ との交点で x 座標が正であるものの x 座標を p とする。このとき、 $0 < t < p$ なる任意の t に対して、常に

$$t < f(t) < p$$

が成り立つことを示しなさい。

問3. $a > 3$ とする。直線 $y = x$ と曲線 $y = f(f(x))$ との交点で、直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ との交点でない点の x 座標を q, r ($q < r$) とする。

q, r を解とする2次方程式を、 a, x を用いて表しなさい。

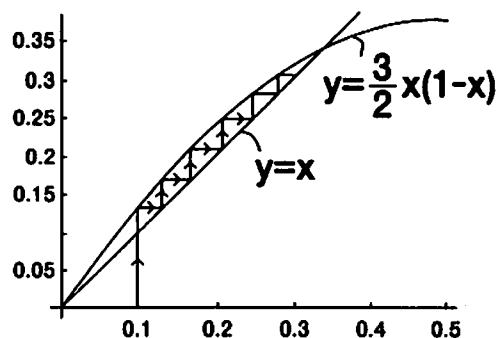
問4. 問3の q, r に対して、 $r = f(q)$ となることを示しなさい。

着眼点

chaos (カオス) と呼ばれている分野から出題しました。問題の方程式はロジスチック方程式 $N_{n+1} = aN_n(1-N_n)$ を連続変数 (N_n を x に、 N_{n+1} を y にするとよい) に直したものです。この簡単な $f(x) = ax(1-x)$ を用いて移されていく点の集合の性質について未解決の問題が沢山あるそうです。

問1. 受験生の皆さんがどんな方法で解くか打診してみました。誰でも描ける放物線のグラフから素朴に解いた人が多いことを願っています。

問2. グラフを利用すると簡単に分かります。例を上げておきました。これは数Aの教科書にもありますね。グラフで見通しをつけるのは大切な手法です。



問3. まともに $f(f(x)) = x$ を解く方法もあります。すなわち、

$$a^2x(1-x)|1-ax(1-x)| - x = 0$$

を解くとよい。左辺の式は

$$ax(1-x)-x \text{ で割り切れて、商が } a^2x^2 - a(a+1)x + (a+1) \text{ となる。}$$

問4. q, r たちは、 $f(x)$ を2回施して初めて自身に戻る数であることを示しています。

解答例

問1. $x \geq ax(1-x)$ だから、 $x = 0, 1$ のときは、どんな a も満たす。

そこで、 $0 < x < 1$ とする。そのとき、

$$\frac{1}{1-x} \geq a \text{ となるから、}$$

$$\frac{1}{1-x} > 1 \text{ なので、 } a \leq 1$$

故に、 a の最大値は、1。

(答) a の最大値は1

問2. 方程式 $ax(1-x) = x$ の解は、 $x = 0$,

$$\frac{a-1}{a} \text{ である。}$$

$$\text{よって、 } p = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$$

いま、 $1 < a \leq 2$ だから、 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ である。

いま、2次関数 $g(x) = ax(1-x) - x = -ax^2 - (a-1)x$ を考えると、 $g(0) = g(p) =$

0で、上に凸だから、 $0 < t < p$ なる任意の t に対し、 $g(t) > 0$ となる。故に、 $at(1-t) - t > 0$ 。よって、 $t < f(t)$ となる。

また、 $f(x) = -a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a}{4}$ だから、

$0 < x < p \leq \frac{1}{2}$ において、 $f(x)$ は単調増加。

$$at(1-t) < ap(1-p) = p$$

故に、 $t < f(t) < p$

問3. $a > 3$

$$\begin{cases} s = f(f(q)) \\ s = q \end{cases} \text{は} \begin{cases} r = f(q) \\ q = f(r) \end{cases} \text{と同じ解} q \text{をも}$$

つ。そのとき、 r もまた後者の解である。

いま、 $q \neq p$ ($r \neq p$ はもちろん $r \neq q$)だから、

$$\begin{cases} r = aq(1-q) \cdots \cdots ① \\ q = ar(1-r) \cdots \cdots ② \end{cases}$$

について、①-②から、

$$q - r = -a(q - r) + a(q^2 - r^2)$$

すなわち、 $1 = -a + a(q + r)$

$$\text{よって、} q + r = \frac{a+1}{a}$$

また、①+②から、

$$\begin{aligned} q + r &= a(q + r) - a(q^2 + r^2) \\ &= a(q + r) - a\{(q + r)^2 - 2qr\} \end{aligned}$$

$$\text{となるので、} qr = \frac{a+1}{a^2}$$

故に、 q, r を解とする2次方程式は、

$$x^2 - \frac{a+1}{a}x + \frac{a+1}{a^2} = 0,$$

すなわち、 $a^2x^2 - a(a+1)x + (a+1) = 0$

問4. 問3の議論から、 $r = f(q)$ がすでに言えている。

第 16 回 北海道高等学校数学コンテスト

採 点 を 終 え て

平成10年 1 月12日(月)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第16回 数学コンテストを終えて

北数教高等部会長 松 田 勝 之

北海道高等学校数学コンテストも、回を重ねて16回目を数えました。これも、北海道算数数学教育会高等学校部会の研究部の先生方を中心とする、全道の数学の先生方の情熱の賜物であり、深く敬意を表したいと思います。今回は、全道から14校、107名の中学生・高校生の参加で実施されました。昨年度から比べると若干は減少したものの、多くの高校生の参加を得ることができたことは、大変喜ばしいことです。

この数学コンテストは、数学に対する興味・関心を高め、数学の素養の向上を目指すことを目的として行われております。出題する問題も、創造力、直感力、思考力、判断力、表現力などを高めることを狙いとして、吟味に吟味を重ねて作成されております。これらの狙いとするところは、これからの21世紀に向けた数学教育の方向性と軌を一にするものであるとも言えます。

しかしながら、1994年に実施された第3回国際数学・理科教育調査（国際教育到達度評価学会）によると、日本の小・中学校の学力は世界3位と高い水準にあるが、多面性がある論述形式の問題には苦手の傾向があると指摘されております。また、最近の日本の大学生には「考える科目である数学」としての認識が、数学専攻の学生にも不足しているとの指摘もあります。これから数学を学ぶ者、数学の先端での活躍を志す者にとって、「考える」ということが何より大事であり、自ら考え、創造的に数学を学んでいくことが、自然科学の分野でも、社会科学の分野でも数学に求められる大切な要素であろうと思います。

このようなことから、今後とも、多くの高校生がこのコンテストに参加してほしいものと願うところです。

終りになりましたが、ご協力を賜りました北海道教育委員会、札幌市教育委員会、北海道高等学校長協会、北海道新聞社、ベネッセコーポレーション、及び、問題作成等にご尽力頂きました方々に厚くお礼を申し上げます。今後とも、変わらぬご支援を賜りますようよろしくお願いを申し上げます。

● 成績優秀者

池田大介	佐々木 創太郎	那須裕也	吉川祐輔
坂井拓朗	堤 雅幸	新藤圭介	辻 孝裕
大橋 聖	平澤 禎紀	田中陽介	辻下裕人
松井祐興	浦嶋 洋介	西島喜明	池田亮一
桑山泰之	渡部 雄介	関 達也	末永義博

第16回 数学コンテスト度数分布

得点	問題 1	問題 2	問題 3	問題 4	問題 5
40	7	6	4	3	0
39	0	0	0	0	0
38	0	1	3	2	0
37	0	1	1	0	0
36	1	1	0	1	0
35	3	0	0	0	0
34	0	0	0	2	0
33	1	0	1	1	0
32	0	0	0	0	0
31	0	7	0	0	0
30	14	1	0	0	0
29	0	0	0	0	0
28	3	2	1	1	0
27	0	0	2	0	0
26	0	25	0	1	0
25	5	0	0	1	0
24	0	1	0	5	0
23	0	3	1	0	0
22	0	5	0	0	1
21	0	2	1	0	1
20	18	1	2	2	4
19	0	3	2	0	0
18	3	0	2	0	0
17	0	0	1	0	1
16	1	0	3	3	1
15	10	1	8	0	3
14	0	0	11	0	2
13	0	2	0	0	0
12	0	22	2	10	1
11	0	1	4	0	0
10	9	3	5	16	3
9	0	0	19	0	1
8	0	8	4	39	0
7	0	0	1	0	1
6	0	0	2	8	2
5	15	2	6	0	3
4	0	0	11	3	2
3	1	0	0	0	1
2	0	0	0	1	18
1	0	0	2	0	0
0	8	1	0	0	54
受験者数	99	99	99	99	99
総 計	1831	2046	1339	1274	361
平均点	18.49	20.67	13.53	12.87	3.65
S・D	11.65	9.63	9.53	9.21	6.08

階 級	合 計
200 ~ 200	0
195 ~ 199	0
190 ~ 194	0
185 ~ 189	0
180 ~ 184	0
175 ~ 179	0
170 ~ 174	1
165 ~ 169	0
160 ~ 164	0
155 ~ 159	0
150 ~ 154	1
145 ~ 149	0
140 ~ 144	0
135 ~ 139	0
130 ~ 134	1
125 ~ 129	2
120 ~ 124	1
115 ~ 119	1
110 ~ 114	3
105 ~ 109	3
100 ~ 104	4
95 ~ 99	0
90 ~ 94	2
85 ~ 89	4
80 ~ 84	3
75 ~ 79	5
70 ~ 74	10
65 ~ 69	10
60 ~ 64	5
55 ~ 59	9
50 ~ 54	9
45 ~ 49	7
40 ~ 44	9
35 ~ 39	5
30 ~ 34	0
25 ~ 29	3
20 ~ 24	0
15 ~ 19	1
10 ~ 14	0
5 ~ 9	0
0 ~ 4	0
99	
6851	
69.20	
27.93	

1

全体集合 U の部分集合 A, B に対し、集合 $A \nabla B$ を

$$A \nabla B = (A \cap B) \cup (\overline{A \cap B})$$

で定義します。ただし、 $\overline{A}$ は、 U における A の補集合のことで、 U の要素であって、 A の要素でないものの集合を表す。

次の問に答えなさい。

問 1. 次の集合を求めなさい。ただし、 ϕ は空集合とする。

- (1) $A \nabla \phi$
- (2) $A \nabla U$
- (3) $A \nabla A$

問 2. 次の等式が成り立つことを示しなさい。

- (4) $A \nabla B = B \nabla A$
- (5) $(A \nabla B) \nabla C = A \nabla (B \nabla C)$

問 3. 2つの集合 A, B に対し、

$$A \nabla X = B$$

となる集合 X を、 A, B で表しなさい。

講 評

配点：問 1 (1)(2)(3) 各 5 点，問 2 (4) 5 点，(5) 10 点，問 3 10 点，計 40 点。

問 1 は出来がよかったが、 $\phi \cup \overline{A}$ など、途中でやめてしまっているものもいくつかあった。問 2 (5) と問 3 は少しむずかしかったようで、解答例のように解いているものは、ほとんどいなかった。しかし、ベン図式を利用するなどして、うまく解いている人もいた。

全体的には説明不足の答案が多く、採点者のほうで意味をくみとって点数を与えた。式の羅列だけでなく、言葉による説明を加えてほしい。答案は採点者にみてもらうものであるし、自分が本当にわかって答えを出していることを採点者に伝えなければならないので、普段から解答の書き方に注意を払って、誰がみてもわかる答案をつくってほしい。

解答例

$$\begin{aligned} \text{問 1. (1)} \quad A \nabla \phi &= (A \cap \phi) \cup (\overline{A \cap \phi}) \\ &= \phi \cup (\overline{A \cap \phi}) \\ &= \phi \cup \overline{A} \\ &= \overline{A} \quad (\text{答}) \quad A \nabla \phi = \overline{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad A \nabla U &= (A \cap U) \cup (\overline{A \cap U}) \\ &= A \cup (\overline{A \cap U}) \\ &= A \cup \phi \\ &= A \quad (\text{答}) \quad A \nabla U = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad A \nabla A &= (A \cap A) \cup (\overline{A \cap A}) \\ &= A \cup \overline{A} \\ &= U \quad (\text{答}) \quad A \nabla A = U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{問 2. (4)} \quad A \nabla B &= (A \cap B) \cup (\overline{A \cap B}) \\ &= (B \cap A) \cup (\overline{B \cap A}) \\ &= B \nabla A \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(5)} \quad (A \nabla B) \nabla C &= \{(A \nabla B) \cap C\} \\ &\quad \cup \{(\overline{A \nabla B}) \cap \overline{C}\} \\ &= \{(A \cap B) \cup (\overline{A \cap B})\} \cap C \\ &\quad \cup \{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B})\} \cap \overline{C} \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A \cap B} \cap C) \\ &\quad \cup \{(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap B})\} \cap \overline{C} \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A \cap B} \cap C) \\ &\quad \cup (\overline{A \cap B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \end{aligned}$$

上の式は、 A, B, C に関して対称であるから、 $(B \nabla C) \nabla A$ も同様に变形できて、

$$\begin{aligned} (A \nabla B) \nabla C &= (B \nabla C) \nabla A \\ &\text{となる。したがって、(4)より、} \\ (A \nabla B) \nabla C &= A \nabla (B \nabla C) \end{aligned}$$

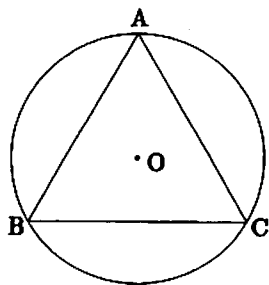
(証明終)

問 3. $A \nabla X = B$ より、

$$\begin{aligned} A \nabla (A \nabla X) &= A \nabla B \\ \text{(5)より、} \quad (A \nabla A) \nabla X &= A \nabla B \\ \text{(3)より、} \quad U \nabla X &= A \nabla B \\ \text{(4)より、} \quad X \nabla U &= A \nabla B \\ \text{(2)より、} \quad X &= A \nabla B \\ &(\text{答}) \quad X = A \nabla B \end{aligned}$$

2

正三角形ABCとその外接円の中心をOとする。



問1. 中心Oを通り、辺ABに平行な直線を、解答用紙に書き込みなさい。

問2. 上の直線と、頂点Aのない方の弧BCとの交点をDとする。線分CDの延長上に、長さが $DE = DB$ となるように点Eをとる。点Dと点Eを解答用紙に書き込みなさい。

問3. 長さについて、 $AD = BD + DC$ であることを証明しなさい。

問4. 外接円の半径が $\sqrt{2}$ であるとき、線分ADの長さを求めなさい。

講評

配点 問1：5点、問2：7点、問3：14点、問4：14点。

問1、問2に関しては、特にコメントはなし。

問3について、トレミーの定理を利用した生徒が数名いました。

—トレミーの定理—

四角形ABCDが円に内接するとき、

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

が成り立つ。

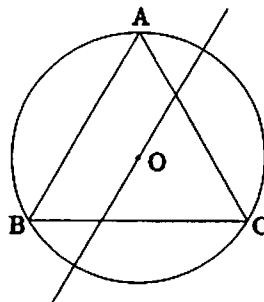
証明は読者に委ねます。

問4. $\angle AOD = 150^\circ$ から、直接求めた生徒もいました。問3をヒントに求めた人が一番多いです。

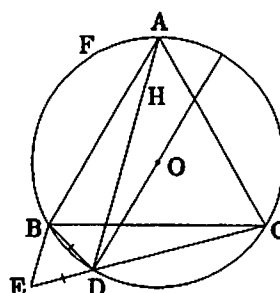
点Dの位置が、劣弧BC上にあれば、問3は成立します。試みて下さい。

解答例

問1



問2



問3. $\triangle ABD \equiv \triangle CBE$ を示そう。

$$\angle BAD = \angle BCE \text{ (円周角),}$$

$$\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ \text{ (円周角)}$$

$$\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ \text{ (円周角)}$$

よって、

$$\angle BDE = 180^\circ - \angle ADB - \angle ADC = 60^\circ.$$

$\triangle DBE$ は、二等辺三角形だから、

$$\angle DBE = \angle DEB = 60^\circ,$$

$\triangle DBE$ は、正三角形となる。

以上から、

$$AB = CB, BD = BE,$$

$$\angle ABD = \angle CBE$$

故に、 $\triangle ABD \equiv \triangle CBE$ (二辺夾角相等)

よって、 $AD = EC = BD + DC$

問4. $\angle DOC = 90^\circ$ だから、

$\triangle ODC$ は直角二等辺三角形。

よって、 $DC = 2$

$$\angle BOD = 120^\circ - \angle DOC = 30^\circ$$

余弦定理から、

$$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2OB \cdot OD \cos$$

$$\angle BOD$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$$

よって、 $BD > 0$ だから、 $BD = \sqrt{3} - 1$

問3より、

$$AD = BD + DC = \sqrt{3} - 1 + 2 = 1 + \sqrt{3}$$

3

n が自然数のとき、 $f(n)$ は、 n のすべての約数（1 と n を含む）の和を表すこととする。

次の問に答えなさい。

$$\text{例： } f(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$$

問 1. $f(12)$ を求めなさい。

問 2. $f(2^{k-1})$ を求めなさい。ただし、 k は自然数である。

問 3. m, n が互いに素な自然数であるとき、
 $f(mn) = f(m)f(n)$
 が成り立つことを説明しなさい。

問 4. $f(2000)$ を求めなさい。

問 5. $f(n) = 2n$ を満たす n を完全数、
 $f(n) < 2n$ を満たす n を不足数、
 $f(n) > 2n$ を満たす n を過剰数と言っている。

次の数は完全数、不足数、過剰数のいずれになるか答えなさい。

- (1) $n = p^{k-1}$ (p は素数、 k は自然数) のとき。
- (2) $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ (k は 2 以上の自然数) とし、 $2^k - 1$ が素数であるとき。

講 評

配点：問 1：4 点、問 2：5 点、問 3：13 点、

問 4：5 点、問 5(1)：6 点 (2)：7 点

受験生全員が問題に手をつけていました。全員が問題の意味を理解していたと思います。数コンとしては珍しく 0 点という受験生がいません。かといって、40 点満点の生徒も多くありません。したがって、問題のレベルが高校 1、2 年生の受験生にとって丁度良かったのではないかと考えています。しかし、等比数列の和を学習していない生徒にとって不利な問題もありました。

設問ごとにみていくと、問 1 はほとんどの生徒が出来ていました。問 2 も良くできていましたが、ケアレスミスで得点を落としている者も多くいました。問 3 については、問題文が「証明せよ」ではなく「説明せよ」なので厳密な解答は要求しないつもりでいました。しかし、多くの受験生が $f(m) = 1$

+ m などと解答し、これでは全く問題文を理解していないことになります。やはり、一般性がありポイントをおさえた解答を作成してください。問 4 については、約数をすべて並べて計算している生徒がかなりいました。具体的に数える方法が悪いということではありませんが、やはり、解答例のように、問 3 を用いてほしいところです。問 5 については、 k, p に具体的に数を代入して、答を予想するのは大変良いことですが、それを答にはできません。また、答しか書いていない生徒もいました。やはり、この問題は式で表しやすい問題です。解答例のような解答を作成することはそれほど難しくないと思います。

解答例

$$\text{問 1. } f(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

$$(\text{答}) f(12) = 28$$

$$\text{問 2. } f(2^{k-1}) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$$

$$= \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k - 1$$

$$(\text{答}) f(2^{k-1}) = 2^k - 1$$

問 3. mn の約数 k は、 m の約数 k_1 と n の約数 k_2 の積で表される。 m, n が互いに素であるから k_1, k_2 は k によってただ 1 組決まる。よって、 mn の約数の和は、 m の約数の和と n の約数の和の積で表される。(説明終)

$$\text{問 4. } f(2000) = f(2^4 \times 5^3)$$

$$= f(2^4) \cdot f(5^3) \quad (\text{問 3 より})$$

$$= \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \times \frac{5^4 - 1}{5 - 1}$$

$$= 31 \times 156 = 4836$$

$$(\text{答}) f(2000) = 4836$$

$$\text{問 5. (1) } f(p^{k-1}) - 2p^{k-1}$$

$$= \frac{p^k - 1 - 2p^{k-1}}{p - 1}$$

$$= \frac{p^k - 1 - 2p^{k-1}(p - 1)}{p - 1}$$

$$= \frac{p^k + 2p^{k-1} - 1}{p - 1}$$

$$= \frac{-p^{k-1}(p - 2) - 1}{p - 1} < 0$$

(答) よって、不足数である。

(2) 2^{k-1} と $2^k - 1$ は互いに素である。

$$\begin{aligned}f(n) &= f(2^{k-1} \cdot (2^k - 1)) \\&= f(2^{k-1}) \cdot f(2^k - 1) \\&= (2^k - 1) \{ (2^k - 1) + 1 \} \\&= (2^k - 1) \cdot 2^k \\&= 2 \cdot 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) \\&= 2n\end{aligned}$$

(答) よって、完全数である。

4

赤い花と白い花の2種類のどちらかが咲く一年草Fがあり、花の色は次のような規則で遺伝する。

花の色に関する遺伝子はAとaの2つであり、一年草FのそれぞれはAA, Aa, aaのいずれかの遺伝子の組み合わせ(遺伝子型)を持っている。AA, Aaの遺伝子型を持つ個体は赤い花を咲かせ、aaの遺伝子型を持つ個体は白い花を咲かせる。それぞれの個体は交配によって次の世代に遺伝子を伝えるが、このとき子は二つの親からそれぞれの遺伝子を同じ確率で受け継ぐものとする。

たとえば、二つの親がともにAAの遺伝子型を持つ場合、AA型の子しか生まれない。(AA型の子が生まれる確率1, Aa, aaの型の子が生まれる確率0である。)また、二つの親がともにAaの遺伝子型を持つ場合、生まれる子はAA, Aa, aaのいずれもあり得る。それぞれの確率はAAの確率 $\frac{1}{4}$, Aaの確率 $\frac{1}{2}$, aaの確率 $\frac{1}{4}$ である。

このとき、次の問に答えなさい。

問1. AAとAa, AAとaa, Aaとaa, aaとaaから生まれる子の、それぞれについて、あり得る遺伝子型とその場合の確率を求めなさい。

さらに、一年草Fの個体数は非常に大きく、突然変異は起こらない。また、この一年草の交配は無作為に行われるものとする。

問2. ある年に遺伝子型AA, Aa, aaを持つ一年草Fの個体数の割合が1:3:1であったとする。このとき、交配の結果生まれる次の年のAA, Aa, aaの個体数の割合

を求めなさい。また、赤い花と白い花の割合も求めなさい。

問3. 問2と同じ設定で次の次の年のAA, Aa, aaの個体数の割合を求めなさい。

問4. ある年に一年草Fについて、AA, Aa, aaの個体数の割合が $x:y:z$ で存在したとする。(ただし、 $x+y+z=1$)。次の年のAA, Aa, aaの個体数の割合を求めなさい。

問5. 問4と同じ設定で、次の次の年のAA, Aa, aaの個体数の割合を求めなさい。また、このことからどんなことが予想されるかも書きなさい。

講 評

[配点]

問1～問5 各8点

[講評]

「解答と解説」の中でもふれたように、この問題は遺伝の問題を確率の考え方を用いて解いてもらおうという意図のもとに出題しました。遺伝の規則については最小限の知識さえあれば(例えばAAとAAからはAAしか生まれないなど)解けるように考えていたのですが全く手がかかずという人はいませんでした。ただ問4以降のときは予想以上に悪かったようです。

問1は大変できがよくほとんどの人が満点ですが質問された全ての組み合わせを答えていない人が多かったです。特に説明は不要と思いますが、AAとAaからAAが生まれる確率を $\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ とした人は値は正しいですが計算としては不適です。その論法ではAAとaaの場合AAも生じうる可能性があります。独立事象の積と考えるべきでしょう。

問2は「解答と解説」では確率を表に出さない解答になっていますが、最初に出題者が作った解答は「条件つき確率」(数B)を用いたものでした。習っていない人が多いということでその形になったのですが、この機会に説明します。Aという試行を行ったあとにBという試行を行ったとして、Aの結果

にBが左右されないとき、AとBは独立といいますが(数I)、Aの結果によってBが変化するときAとBは従属といいます。例えば2つの見分けのつかない箱A₁とA₂があつてA₁には赤玉1個白玉3個が入っていて、A₂には赤玉3個白玉3個が入っていたとします。どちらかの箱から玉をひとつ取りだすとき赤玉が出る確率はA₁からだ $\frac{1}{4}$ ですが、 $(P_{A_1}(B)=\frac{1}{4})$ と表す) A₂からだ $\frac{1}{2}$ です $(P_{A_2}(B)=\frac{1}{2})$ 。

A₁, A₂をえらぶ確率はいずれも $\frac{1}{2}$ より $(P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2})$

A₁をえらび、そこから赤が出る確率を $P(A_1 \cap B)$ とすると $P(A_1 \cap B)=P(A_1) \times P_{A_1}(B)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

A₂をえらび、そこから赤が出る確率を $P(A_2 \cap B)$ とすると $P(A_2 \cap B)=P(A_2) \times P_{A_2}(B)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ となります。この2つの事象は排反ですからA₁またA₂から赤玉が出る確率は

$P(A_1 \cap B)+P(A_2 \cap B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ となります。

確かに数Iの教科書にはのっていない内容なのですが、このことを知っているとかじを元に戻さないくじびきでもひいた順番によって当たる確率がかわらないこともかんたんに示せるので知っておいてほしいことだと思います。正解者の多くはこの方法を用いていました。次のような方法です。

AAが全体の $\frac{1}{5}$, Aaが全体の $\frac{3}{5}$, aaが全体の $\frac{1}{5}$ なのでAAとAA交配する確率 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}=\frac{1}{25}$

$$AA \text{ と } Aa \quad \propto \quad \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{25}$$

$$AA \text{ と } aa \quad \propto \quad \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{25}$$

$$Aa \text{ と } Aa \quad \propto \quad \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$Aa \text{ と } aa \quad \propto \quad \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{6}{25}$$

$$aa \text{ と } aa \quad \propto \quad \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

(AAとAaは逆のパターンAaとAAも含めるので2倍する。オス・メスで考えるとよい?)

2倍を忘れた人もかなりいました。このとき確率の和は1となりません。全ての場合を考えるに反します。

さて上記の組み合わせからAAの子が生まれるのはAAとAAからは確率1, AAとAaからは確率 $\frac{1}{2}$ AaとAaからは確率 $\frac{1}{4}$ であるので

3つの場合を合せてAAが生まれるのは

AA - AA から(AA) AA - Aa から(AA) Aa - Aa から(AA)

$$\frac{1}{25} \times 1 + \frac{6}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{4+12+9}{100} = \frac{25}{100} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

同様にAaが生まれるのは

$$\frac{6}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{25} \times 1 + \frac{9}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{25} \times \frac{1}{2} = \frac{6+4+9+6}{50} = \frac{25}{50} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

aaが生まれるのは

$$\frac{9}{25} \times \frac{1}{4} + \frac{6}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{25} \times 1 = \frac{9+12+4}{100} = \frac{25}{100} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

となるので、確率の比は $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ より個体数の比も1:2:1となるわけです。

誤答のうち個体数の比が1:3:1ということからAA20, Aa60, aa20とみなして組み合わせを使って解いていた人がいましたが、数を100としたら、

AA - AAで交配する確率は $\frac{{}^{20}C_2}{{}^{100}C_2} = \frac{20 \cdot 19}{100 \cdot 99} = \frac{19}{495}$

なのですが、数の限定がありませんし、また十分数が大きければこの確率も $\frac{1}{25}$ にかぎりなく近づくの

でこの方法はとれません。

問3も同様なのですが、ここは計算を書いてほしいところです。実はあとでのべるハーディワインベルグの法則で外的なまたは内的な要因がなければ遺伝子型の比率は変わらないのですが、そのことを示してもらわないと問4以降につながらないのです。

問4も問2と同じ方式で

AAが生まれる確率

$$x^2 \times 1 + 2xy \times \frac{1}{2} + y^2 \times \frac{1}{4} = \frac{4x^2 + 4xy + y^2}{4} = \frac{(2x+y)^2}{4}$$

Aaが生まれる確率

$$2xz \times 1 + 2xy \times \frac{1}{2} + y^2 \times \frac{1}{2} + 2yz \times \frac{1}{2} = \frac{4xz + 2xy + 2yz + y^2}{2}$$

$$= \frac{(y+2x)(y+2z)}{2}$$

aa が生まれる確率

$$z^2 \times 1 + 2yz \times \frac{1}{2} + y^2 \times \frac{1}{4} = \frac{4z^2 + 4yz + y^2}{4} = \frac{(2z+y)^2}{4}$$

よって比は $(2x+y)^2 : 2(2x+y)(2z+y) : (2z+y)^2$ となります。

問4は手のついた答案が少なく、当てずっぽうとしか思えない答が多かったです。1 : 2 : 1とか、 $x : y : z$ (変らない), で $x^2 : y^2 : z^2$ などなど、

問5も同じ方式でよいのですが

$$\frac{2x+y}{2} = \alpha, \quad \frac{2z+y}{2} = \beta \text{ とおいておくと}$$

個体数の比は $\alpha^2 : 2\alpha\beta : \beta^2$ となるので

$$\begin{aligned} AA : Aa : aa \quad [x = \alpha^2, y = 2\alpha\beta, z = \beta^2 \text{ 代入}] \\ = (2\alpha^2 + 2\alpha\beta)^2 : 2(2\alpha^2 + 2\alpha\beta)(2\beta^2 + 2\alpha\beta) : (2\beta^2 + 2\alpha\beta)^2 \\ = 4(\alpha + \beta)^2 \alpha^2 : 8(\alpha + \beta)^2 \alpha\beta : 4\beta^2(\alpha + \beta)^2 \\ = \alpha^2 : 2\alpha\beta : \beta^2 \text{ とするとすっきりします。} \end{aligned}$$

(受験番号31の那須君の方法)

さて、この問題の採点中にこの問題の内容は生物Ⅱで扱うハーディ・ワインベルグ法則を使えばすぐにできるという指摘をうけました。

「AA, Aa, aaによって表される遺伝子型があるとき最初の集団の中でAの割合を p

aの割合を g とすると ($p + g = 1$)

(二世代目以降の) AA : Aa : aa の割合は

$p^2 : 2pg : g^2$ となりその後も変らない

ただし条件として

①数が十分に多い②突然変異はおこらない

③集団の移動がない

④選択がおこらない(生存上差がない)が必要」

採点時にもこの方法を使ったと思われる答案が、いくつかありました。しかし問題の意図および「数学コンテスト」としての性格を考えると説明ぬきで答だけの答案や、きちんとした説明のないものは減点しました。もちろん使ってはいけないということではありません。説明をちゃんとしている答案にそれなりの評価をしています。ちなみにこの法則の発見者の一人 G. H. ハーディはイギリスの数学者(1887-1947)でハーディリトルウッドの名著「不等式」やインドの若くして亡くなった天才数学者ラマヌジャンとの友情で知られた人です。

解答例

問1.

	A	A
A	AA	AA
a	Aa	Aa

	A	A
a	Aa	Aa
a	Aa	Aa

	A	a
a	Aa	aa
a	Aa	aa

	a	a
a	aa	aa
a	aa	aa

よって、(AAの確率, Aaの確率, aaの確率)の形でかくと、

AAとAaの場合、 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

AAとaaの場合、 $(0, \frac{1}{2}, 0)$

AAとAaの場合、 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

aaとaaの場合、 $(0, 0, 1)$

問2.

	A	A	3A	3a	a	a
A	AA	AA	3AA	3Aa	Aa	Aa
A	AA	AA	3AA	3Aa	Aa	Aa
3A	3AA	3AA	9AA	9Aa	3Aa	3Aa
3a	3Aa	3Aa	9Aa	9aa	3aa	3aa
a	Aa	Aa	3Aa	3aa	aa	aa
a	Aa	Aa	3Aa	3aa	aa	aa

故に、AA, Aa, aaの個体数の比は、25 : 50 : 25 = 1 : 2 : 1となり、

また、赤い花と白い花の比は、3 : 1である。

問3

	A	A	2A	2a	a	a
A	AA	AA	2AA	2Aa	Aa	Aa
A	AA	AA	2AA	2Aa	Aa	Aa
2A	2AA	2AA	4AA	4Aa	2Aa	2Aa
2a	2Aa	2Aa	4Aa	4aa	2aa	2aa
a	Aa	Aa	2Aa	2aa	aa	aa
a	Aa	Aa	2Aa	2aa	aa	aa

故に、AA, Aa, aaの個体数の比は、16 : 32 : 16 = 1 : 2 : 1となる。

問 4.

	xA	xA	yA	ya	za	za
xA	x^2AA	x^2AA	$xyAA$	$xyAa$	$zxAa$	$zxAa$
xA	x^2AA	x^2AA	$xyAA$	$xyAa$	$zxAa$	$zxAa$
yA	$xyAA$	$xyAA$	y^2AA	y^2Aa	$yzAa$	$yzAa$
ya	$xyAa$	$xyAa$	y^2Aa	y^2aa	$yzaa$	$yzaa$
za	$zxAa$	$zxAa$	$yzAa$	$yzaa$	z^2aa	z^2aa
za	$zxAa$	$zxAa$	$yzAa$	$yzaa$	z^2aa	z^2aa

故に, AA, Aa, aa の個体数の比は,
 $(4x^2+4xy+y^2) : (2y^2+4xy+4yz+8zx)$
 $: (4z^2+4yz+y^2)$ となる。

$$\begin{aligned} & (4x^2+4xy+y^2) + (2y^2+4xy+4yz+8zx) \\ & + (4z^2+4yz+y^2) \\ & = 4x^2+4y^2+4z^2+8xy+8yz+8zx \\ & = 4(x+y+z)^2 = 4 \end{aligned}$$

だから, 求める比は, 4 で割って,

$$\begin{aligned} & \frac{(2x+y)^2}{4} : \frac{(2x+y)(y+2z)}{2} : \\ & \frac{(y+2z)^2}{4} \text{ となる。} \end{aligned}$$

問 5. 問 4 で求めた比の式をもう一度使う。

求める比を

$$x' : y' : z' \quad (x' + y' + z' = 1) \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\left\{ 2 \frac{(2x+y)^2}{4} + \frac{(2x+y)(y+2z)}{2} \right\}^2}{4} \\ y' &= \frac{\left\{ 2 \frac{(2x+y)^2}{4} + \frac{(2x+y)(y+2z)}{2} \right\} \times}{2} \\ & \quad \frac{\left\{ \frac{(2x+y)(y+2z)}{2} + 2 \frac{(y+2z)^2}{4} \right\}^2}{2} \\ z' &= \frac{\left\{ \frac{(2x+y)(y+2z)}{2} + 2 \frac{(y+2z)^2}{4} \right\}^2}{4} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{(2x+y)^2}{4}, \quad y' = \frac{(2x+y)(y+2z)}{2}, \\ z' &= \frac{(y+2z)^2}{4} \end{aligned}$$

故に, 比は, 問 4 と変わらない。その後も同じ比で出現する。

5

関数 $f(x)$ を $f(x) = ax(1-x)$ ($0 \leq x \leq 1$, a は正の定数) と定める。

このとき, 次の問に答えなさい。

問 1. $0 \leq x \leq 1$ のとき, $x \geq ax(1-x)$ を満たす最大の正の数 a の値を求めなさい。

問 2. $1 < a \leq 2$ とする。直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ との交点で x 座標が正であるものの x 座標を p とする。このとき, $0 < t < p$ なる任意の t に対して, 常に

$$t < f(t) < p$$

が成り立つことを示しなさい。

問 3. $a > 3$ とする。直線 $y = x$ と曲線 $y = f(f(x))$ との交点で, 直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ との交点でない点の x 座標を q, r ($q < r$) とする。

q, r を解とする 2 次方程式を, a, x を用いて表しなさい。

問 4. 問 3 の q, r に対して, $r = f(q)$ となることを示しなさい。

講 評

問題の出典は「カオスとの遭遇」(デニー・グーリック著, 産業図書, 3,296円) にあります。数Ⅱの微積をおさえた 2 年生に薦めます。最初は難しいかもしれませんが習っていない数Ⅲの部分は先生に聞くなどして少しでも読み進めたら, 参考書を利用する以上の力がつくでしょう。

配点は各問 10 点としました。平均点は 3.7 ぐらいだと思います。時間も不足していたかもしれませんが, 全体的に難しかったようです。

問 1 設問に不備があったかもしれませんが。あくまでも「 $0 \leq x \leq 1$ において $x > ax(1-x)$ 」と解釈している解答が目立ちました。出題者としては, グラフを描いてみるとすぐ分かるのですが, $(0, 0)$ がすでに交点なのだから $x > ax(1-x)$ を満たすには, $(0, 0)$ が接点になる or 交点があるとすれば $x < 0$, のいずれかであることを見抜いてほしかったのです。

誤答として, $D \leq 0$ のみで押し切っている

解答がありました。上の説明からこれが誤りであることは分かってもらえると思います。

解答としては、

$$x > ax(1-x) \text{ から } x \neq 0 \text{ として、} \\ \frac{1}{1-x} \geq a \text{ を導いて} \\ x=0 \text{ のとき } a \leq 1. \quad \therefore a \text{ の最大値 } 1$$

が結構ありました。1, 2年生ということで減点はしませんでした。極限値的な扱いになっている点に注意して下さい。

問2 $p = 1 - \frac{1}{a}$ で、 $1 < a \leq 2$ から
 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ に気付くかがポイント。
 交点の x 座標は

$x=0$, p , $0 < t < p$ で $y = ax(1-x)$
 は $y=x$ の上にあるので、 $t < f(t)$, この範囲
 で $f(t)$ の最大値は $f(p) = p \quad \therefore t < f(t) < p$
 正解者は6名と少なかったですが、全員が上
 とほぼ同じ解法でした。

問3 正解者は坂井 拓朗君の1名でした。途中の
 ミスがなければ、池田 亮一君(函ラ), 新藤
 圭介君(札南)の両名が完答できたでしょう。

問4 時間に余裕がなかったのか、正解者は1名も
 いませんでした。

解答例

問1 出題者の第1案としてあったものと同じで
 す。

$$x \geq ax(1-x)$$

$$a > 0 \text{ より, } x(x + \frac{1-a}{a}) \geq 0$$

ここで、 $0 \leq x \leq 1$ で $y \geq 0$ だから

$$(\text{但し, } y = x(x + \frac{1-a}{a}))$$

$$\frac{1-a}{a} \geq 0 \text{ を満たす } a \text{ を求めればよい。}$$

$$a > 0 \text{ より } 1-a \geq 0, \quad a \geq 1.$$

$$\therefore a \text{ の最大値は } 1$$

問2 p は $y=x$ と $y=f(x)$ との交点の x 座標であ
 り y 座標でもある。

$$\therefore p = f(p)$$

$1 < a \leq 2$ より、 $y=f(x)$ の頂点の y 座標は

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{4} a \leq \frac{1}{2}$$

つまり、 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ である。

よって、 $0 < t < p \leq \frac{1}{2}$ より

$y=f(x)$ は頂点が最大となるので、

$$\therefore f(t) < f(p) = p$$

また、 $0 < t < p$ のとき

$y=f(x)$ は $y=x$ より上にあるので、

$$\therefore f(t) > t$$

以上より、

$$\therefore t < f(t) < p$$

問3 $f(f(x)) - x = x |a^3x^3 - 2a^3x^2 + (a^3 + a^2)x - a^2 + 1| = 0$
 $a^3x^3 - 2a^3x^2 + (a^3 + a^2)x - a^2 + 1 = 0$ の解
 は、

$$x = \frac{a-1}{a}, \quad q, \quad r$$

解と係数の関係より、

$$q + r + \frac{a-1}{a} = 2,$$

$$qr \cdot \frac{a-1}{a} = \frac{1}{a} (1 - \frac{1}{a^2}),$$

これから

$$q + r = \frac{a+1}{a}, \quad qr = \frac{a+1}{a^2}$$

したがって、求める2次方程式は

$$x^2 - (q+r)x + qr =$$

$$x^2 - \frac{a+1}{a}x + \frac{a+1}{a^2} = 0$$

$$\therefore a^2x^2 - a(a+1)x + (a+1) = 0$$

問4 $a^2x^2 - a(a+1)x + (a+1) = 0$ を解いて

$$x = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2-2a-3}}{2a}$$

$$q = \frac{a+1 + \sqrt{a^2-2a-3}}{2a},$$

$$r = \frac{a+1 - \sqrt{a^2-2a-3}}{2a} \text{ として、}$$

$a^2q^2 - a(a+1)q + (a+1) = 0$ が成立して

$$aq^2 - (a+1)q + 1 + \frac{1}{a} = 0 \text{ から}$$

$$-aq^2 + aq = -q + 1 + \frac{1}{a} \cdots \textcircled{1} \text{ を用意。}$$

$$f(q) = aq(1-q) = -aq^2 + aq \\ = -q + 1 + \frac{1}{a} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= -\frac{a+1 + \sqrt{a^2-2a-3}}{2a} + 1 + \frac{1}{a}$$

$$= \frac{a+1 - \sqrt{a^2-2a-3}}{2a} = r$$

$f(r) = q$ も同様。

担 当 委 員

小 林	敬 正	播 摩	茂
佐々木	光 憲	古 川	春
鈴 木	雅 博	前 田	利
棚 橋	純	松 本	郎
中 居	基 昭	皆 川	雄
長 尾	章	山 崎	典
中 西	範	大 和	也
永 洵	二	吉 町	明
林	一	和 田	興
			政 勝 陸 一 昌 達 隆 文