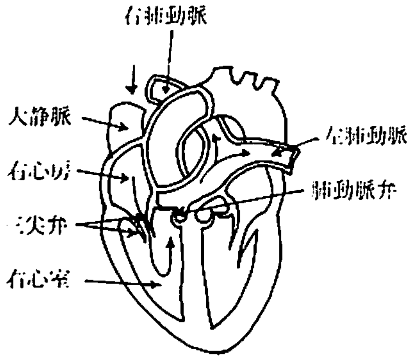
第 14 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　題

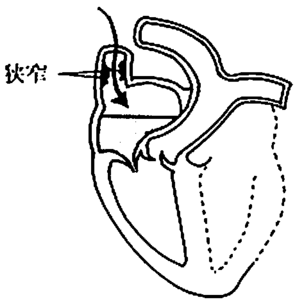
平成８年１月12日㈮

９時00分～12時30分（210分）

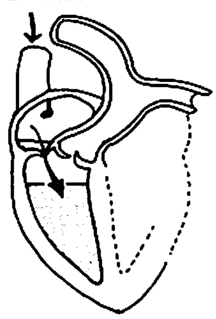
北海道算数数学教育会高等学校部会



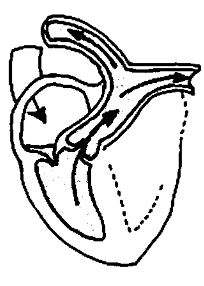
(1)　(一定の血液)



(2)　(一定の血液)



(3)



問題 1　　左図は，心臓の断面である。全身より大静脈に集まった血液は，右心房にたまり，右心室の拡張ともに，三尖弁口を通って右心室に流入した後，右心室の収縮により，右心室から肺動脈弁口を経て，肺動脈に送られる。

(1)　大静脈より，右心房に絶えず一定の血液が流入している。健康な時は $\frac{5}{100}$ 秒で右心房は血液で充満されるが，今，大静脈に狭窄があり血流が悪くなったため，健康時よりも $\frac{3}{100}$ 秒右心房に血液が充満されるのが遅くなった。健康時と大静脈狭窄時との血液流入量の比を求めよ。

(2)　右心房が血流で充満すると，血液は三尖弁口を通って右心室へ送られるが，三尖弁口が狭くなり $\frac{7}{100}$ 秒で右心房の血液はなくなるが，三尖弁を 2 倍に広げると $\frac{3}{100}$ 秒でなくなった。三尖弁口を何倍に広げると $\frac{5}{100}$ 秒で，右心房の血液は右心室に全て送り出されるか。

(3)　右心室に充満した血液は，右心室の収縮により肺動脈弁口を通って，肺動脈によって肺に送られる。肺の手術のため，左肺動脈を閉鎖し，右肺動脈だけで右心室から血液を送り出せば，右肺動脈を閉鎖し，左肺動脈だけで血液を送り出すよりも $\frac{2}{10}$ 秒多くかかり，閉鎖せず左右両肺動脈で血液を送り出す場合より $\frac{7}{10}$ 秒多くかかる。

(i)　左肺動脈を閉鎖し，右肺動脈だけの時右心室から血液を送り出すのに何秒かかるか。

(ii)　右肺動脈を閉鎖し，左肺動脈だけの時，右心室から血液を送り出すのに何秒かかるか。

問題 2　　△ABC があって∠B＝2∠C となっている。

(1)　CB の延長上に AB＝BD となるように点 D を取れ。
注：点 D は解答用紙に与えられてある△ABC の図をもとにして取ること。
free hand でよい。尚(2)(3)に必要な図も，この図につけ加える。

(2)　$DA^2=DB\cdot CD$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$AC^2=AB(AB+BC)$ で成り立つことを証明せよ。

問題 3　次の問に答えよ。

(1) 整数 n に対して，$N=3n^2-n+2$ は偶数となることを示せ。

(2) 整数 a，b，c に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。

① $f(1)$，$f(2)$ が偶数となるとき，

(ア) $a+b$，c の値が偶数であることを示せ。

(イ) $f(3)$ の値が偶数となることを示せ。

② ある整数 k に対して，$f(k)$，$f(k+1)$ が偶数になるとき，

(ア) $a+b$，c の値が偶数であることを示せ。

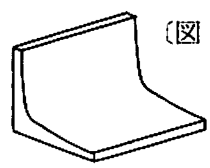
(イ) 任意の整数 n に対して，$f(n)$ の値が偶数となることを示せ。

問題 4

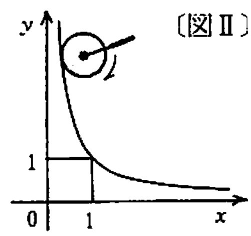
(1) t が正の実数のとき，$u=t+\dfrac{1}{t}$ の取りうる値の範囲を求めよ。
また，$u=t+\dfrac{1}{t}$ が最小になるときの t の値を求めよ。

(2) 図Ⅰのような曲面の壁があり，真横から見た断面は図Ⅱのように $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ で表せる。この曲面を円筒型のローラを用いて図Ⅱのように塗装する。ローラの半径をなるべく大きくしたいのだが，大きすぎると図Ⅲのように塗装できない部分ができてしまう。点 $(1,\ 1)$ の部分を塗装できるようなローラの最大半径を求めよ。

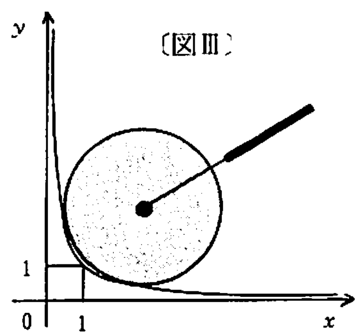
注意：点 $(1,\ 1)$ を塗ることができれば他の部分はすべて塗れることは証明しなくてもよい。また図Ⅱ，Ⅲの断面図で考えればよい。



〔図Ⅰ〕



〔図Ⅱ〕



〔図Ⅲ〕

問題 5　次の各問に答えよ。

(1) 任意の実数 a，b に対して，$\big||a|-|b|\big|\leqq|a-b|$ が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|\dfrac{1}{2}|x|-2\right|$ と定める。任意の実数 a，b に対して，
$|f(a)-f(b)|\leqq\dfrac{1}{2}|a-b|$ が成り立つことを示せ。

(3) 関数 $g(x)$ を，$g(x)=f(f(f(x)))$ と定める。任意の実数 a，b に対して，
$|g(a)-g(b)|\leqq\dfrac{1}{8}|a-b|$ が成り立つことを示せ。

(4) 実数 s，t が，$g(s)=s$ かつ $g(t)=t$ を満たすとき，$s=t$ となることを示せ。

(5) 実数 u が，$f(u)=u$ を満たすならば，$g(u)=u$ となることを示せ。

(6) 方程式 $g(x)=x$ を解け。

平成７年度(平成８年１月12日実施)

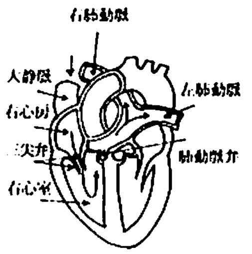
第 14 回

北海道高等学校数学コンテスト

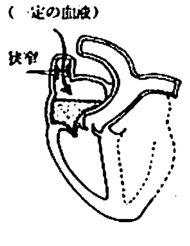
解　答　と　解　説

北海道算数数学教育会高等学校部会

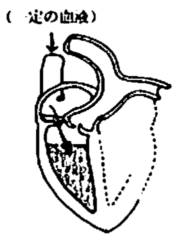
1



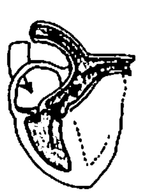
左図は，心臓の断面である。全身より大静脈に集まった血液は，右心房にたまり，右心室の拡張ともに，三尖弁口を通って右心室に流入した後，右心室の収縮により，右心室から肺動脈弁口を経て，肺動脈に送られる。



(1) 大静脈より，右心房に絶えず一定の血液が流入している。健康な時は $\frac{5}{100}$ 秒で右心房は血液で充満されるが，今，大静脈に狭窄があり血流が悪くなったため，健康時よりも $\frac{3}{100}$ 秒右心房に血液が充満されるのが遅くなった。健康時と大静脈狭窄時との血液流入量の比を求めよ。



(2) 右心房が血流で充満すると，血液は三尖弁口を通って右心室へ送られるが，三尖弁口が狭くなり $\frac{7}{100}$ 秒で右心房の血液はなくなるが，三尖弁口を2倍に広げると $\frac{3}{100}$ 秒でなくなった。三尖弁口を何倍に広げると $\frac{5}{100}$ 秒で，右心房の血液は右心室に全て送り出されるか。



(3) 右心室に充満した血液は，右心室の収縮により肺動脈弁口を通って，肺動脈によって肺に送られる。肺の手術のため，左肺動脈を閉鎖し，右肺動脈だけで右心室から血液を送り出せば，右肺動脈を閉鎖し，左肺動脈だけで血液を送り出すよりも $\frac{2}{10}$ 秒多くかかり，閉鎖せず左右両肺動脈で血液を送り出す場合より $\frac{7}{10}$ 秒多くかかる。

(i) 左肺動脈を閉鎖し，右肺動脈だけの時右心室から血液を送り出すのに何秒かかるか。

(ii) 右肺動脈を閉鎖し，左肺動脈だけの時，右心室から血液を送り出すのに何秒かかるか。

着眼点

未知数を文字を置き換え，正しく処理できるかどうかの問題。

解答例

(1) （単位時間の血液流入量）

$$=\frac{1}{（血液が充満するのに要する時間）}$$

の関係を用いる。

健康な時右心房に血液が充満される時間：$\frac{5}{100}$秒

静脈狭窄時の右心房に血液が充満される時間：$\frac{5}{100}+\frac{3}{100}$秒

従って，

健康時は1秒間に $\frac{100}{5}$，静脈狭窄時は $\frac{100}{8}$ の血液流入量がある。

∴ 健康時：静脈狭窄時 $=\frac{100}{5}:\frac{100}{8}=8:5$

(2) 単位時間の三尖弁口血液通過量と，大静脈から右心房への血液流入量を未知数として(1)の関係を用いて同様に考える。

右心房が血液で充満し，三尖弁口を通りはじめるまでの右心房の血液量を a，1秒間に三尖弁口を通る血液量を x，1秒間に大静脈からの右心房への血液流入量を y とおくと，

$$\frac{a}{x-y}=\frac{7}{100}\cdots\cdots①\qquad\frac{a}{2x-y}=\frac{3}{100}\cdots\cdots②$$

①，②から a を消去すると

$$a=\frac{7}{100}(x-y)=\frac{3}{100}(2x-y)$$

$$x=4y\qquad\therefore x:y=4:1$$

三尖弁口を m 倍にすると

$$\frac{a}{mx-y}=\frac{7(x-y)}{100}\times\frac{1}{mx-y}$$

$x=4k$　$y=k$ を代入

$$\frac{a}{mx-y}=\frac{7(4k-k)}{100(m\cdot4k-k)}=\frac{21k}{100(4mk-k)}$$

$$=\frac{21k}{100(4m-1)k}=\frac{21}{100(4m-1)}$$

題意より

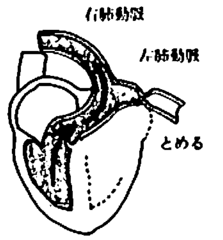
$$\frac{21}{100(4m-1)}=\frac{5}{100}$$

$$\frac{21}{4m-1}=5,\ 21=20m-5,\ 20m=26$$

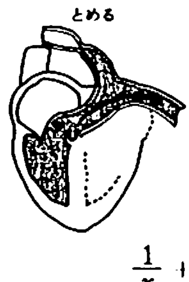
$$\therefore m=\frac{26}{20}=\frac{13}{10}=1.3$$

1.3倍にする。

(3)



（i）右肺動脈だけで，右心室から血液を送り出すのに x 秒かかるとすると，左肺動脈だけで血流を送り出すのに $x-\frac{2}{10}$ 秒かかり，左右両肺動脈では，$x-\frac{7}{10}$ 秒かかる。



右肺動脈の1秒間の血液流出量 $=\frac{1}{x}$

左肺動脈の1秒間の血液流出量 $=\dfrac{1}{x-\frac{2}{10}}$

左右肺動脈の1秒間の血液流出量 $=\dfrac{1}{x-\frac{7}{10}}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{2}{10}}=\frac{1}{x-\frac{7}{10}}$$

分母を払って $\left(x-\frac{2}{10}\right)\left(x-\frac{7}{10}\right)+$

$$x\left(x-\frac{7}{10}\right)=x\left(x-\frac{2}{10}\right)$$

$$x^2-\frac{14}{10}x-\frac{14}{100}=0$$

$x=\dfrac{7\pm\sqrt{63}}{10}$ 　　$x>0$ より $\dfrac{7+\sqrt{63}}{10}$ （秒）

(ii)（i）より，$x-\frac{2}{10}=\dfrac{5+\sqrt{63}}{10}$ （秒）

2

△ABCがあって∠B＝2∠Cとなっている。

(1) CBの延長上にAB＝BDとなるように点Dを取れ。

注：点Dは解答用紙に与えられてある△ABCの図をもとにして取ること。

free handでよい。尚(2)(3)に必要な図も，この図につけ加える。

(2) $DA^2=DB\cdot CD$ が成り立つことを証明せよ。

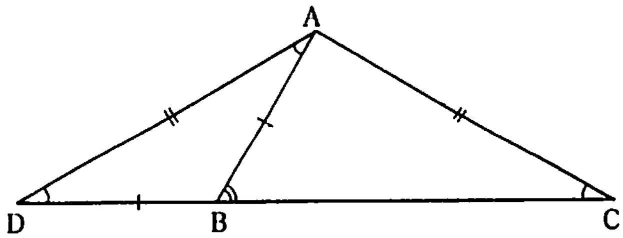
(3) $AC^2=AB(AB+BC)$ で成り立つことを証明せよ。

着眼点

CBの延長上に点Dをとることによって等角関係を作り相似三角形によって(2)を証明する。数学Aでは〝方べきの定理〟を習う。これによれば(2)の証明はずっと楽になるが〝数学A〟での〝平面幾何〟を教えない学校が大多数である現場ではこのコンテストの参加者にもそれは望まれぬであろう。

解答例

(1) 図の(2)(3)の分まで示してある。



(2) BD＝BA から∠D＝∠DAB，∠D＋∠DAB＝∠ABC＝2∠C

∴∠D＝∠C　△ADC，△BADで二角相等

△ADC∽△BAD　$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BA}{AD}$

∴$DA^2=AB\cdot DC=DB\cdot DC$

別　解

〝方べき定理〟を使えば∠DAB＝∠CからDAは△ABCの外接円周上の点Aにおける接線となるから $DA^2=DB\cdot DC$ となる。

然し大多数の者は未習であろう。もしこの定理を使うならばDAの性質を明確に示さなければならない。

(3) AC＝DA また(2)から $AC^2=DA^2=DB\cdot DC$，DB＝AB

DC＝DB＋BC＝AB＋BC

∴　$AC^2=AB\ (AB+BC)$

3

次の問に答えよ。

(1) 整数 n に対して，$N=3n^2+n+2$ は偶数となることを示せ。

(2) 整数 a，b，c に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。

① $f(1)$，$f(2)$ が偶数となるとき

(ｱ) $a+b$，c の値が偶数であることを示せ。

(ｲ) $f(3)$ の値が偶数となることを示せ。

② ある整数 k に対して，$f(k)$，$f(k+1)$ が偶数になるとき，

(ｱ) $a+b$，c の値が偶数であることを示せ。

(ｲ) 任意の整数 n に対して，$f(n)$ の値が偶数となることを示せ。

着眼点

(1)　nが偶数のときは明らかなので，nが奇数のときを示す。

またほ，$n(n+1)$ は偶数となることを考えて式変形をする。

(2)　a，bが共に偶数または，奇数のとき$a+b$が偶数となる。cが偶数であることを最初に証明したい場合は，別解のような解答がある。全体的に難しい問題ではないので，素直に考えていくと解けるはずである。

解答例

(1)　nが偶数のとき，明らかにNは偶数となる。

nが奇数のとき，$n=2j+1$とおく（jは整数）

$N=3(2j+1)^2+(2j+1)+2$

$=12j^2+12j+3+2j+1+2$

$=12j^2+14j+6=2(6j^2+7j+3)$

よって，Nは偶数となる。

(別解)　$N=n^2+2n^2+n+2=n(n+1)+2(n^2+1)$

$n(n+1)$ は偶数なので，よってNは偶数となる。

(2)①

(ア)　$f(1)=a+b+c=2p$とおく。

$f(2)=4a+2b+c=2q$おく

$f(2)-f(1)=3a+b=2(q-p)$

ゆえに，$3a+b$が偶数なので

aが偶数のとき，bも偶数となり，$a+b$は偶数となる

aが奇数のとき，bも奇数となり，$a+b$は偶数となる

よって，$a+b$は偶数となる。

次に，$a+b+c=2p$より

$c=2p-(a+b)$

$a+b$は偶数なので，cは偶数となる。

(イ)　$f(3)=9a+3b+c$

$a+b$は偶数なので，$a+b=2r$とおく

このとき，$b=2r-a$を代入すると

$f(3)=9a+3(2r-a)+c$

$=6a+6r+c$

cは偶数なので，よって$f(3)$は偶数となる

②(ア)　$f(k)=ak^2+bk+c=2u$とおく。

$f(k+1)=a(k+1)^2+b(k+1)+c=ak^2+(2a+b)k+a+b+c=2v$とおく。

このとき，$f(k+1)-f(k)=2ak+a+b=2(v-u)$

ゆえに，$a+b=2(v-u)-2ak=2(v-u-ak)$

よって，$a+b$は偶数となる。

次に，$a+b$は偶数なので，$a+b=2m$とおく。

$b=2m-a$を$f(k)$の式に代入すると

$f(k)=ak^2+(2m-a)k+c=2L$

$c=2L-2mk-ak(k-1)$

$k(k-1)$は偶数であるので，よってcは偶数である。

(別解)　kが偶数のとき，$f(k)=ak^2+bk+c=k(ak+b)+c$が偶数であることから，

$k(ak+b)$は偶数なのでcは偶数となる。

kが奇数のとき，$f(k+1)=a(k+1)^2+b(k+1)+c=(k+1)(ak+a+b)+c$が偶数であることから，

$(k+1)(ak+a+b)$は偶数なのでcは偶数となる。

よって，cは偶数となる。

(イ)　$b=2m-a$より

$f(n)=an^2+(2m-a)n+c$

$=an(n-1)+2mn+c$

$n(n-1)$，cは偶数なので，よって$f(n)$は偶数となる。

(別解)　$a+b$が偶数であることから，a，bは共に偶数または共に奇数である。

a，bが共に偶数のときは明らかに成り立つ。

a，bが共に奇数のとき，$a=2s+1$，$b=2t+1$とおくと

$f(n)=an^2+bn+c$

$=(2s+1)n^2+(2t+1)n+c$

$=2(sn^2+tn)+(n^2+n)+c$

よって，cは偶数，$n^2+n=n(n+1)$も偶数なので，$f(n)$は偶数である。

(Q. E. D.)

4

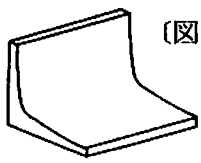
(1)　tが正の実数のとき，$u=t+\dfrac{1}{t}$の取りうる値の範囲を求めよ。

また，$u=t+\dfrac{1}{t}$が最小になるときのtの値を求めよ。

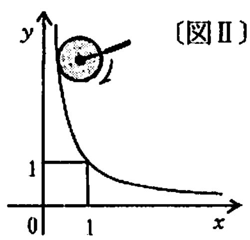
(2) 図Ⅰのような曲面の壁があり，真横から見た断面は図Ⅱのように $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ で表せる。この曲面を円筒型のローラを用いて図Ⅱのように塗装する。ローラの半径をなるべく大きくしたいのだが，大きすぎると図Ⅲのように塗装できない部分ができてしまう。

点（1，1）の部分を塗装できるようなローラの最大半径を求めよ。

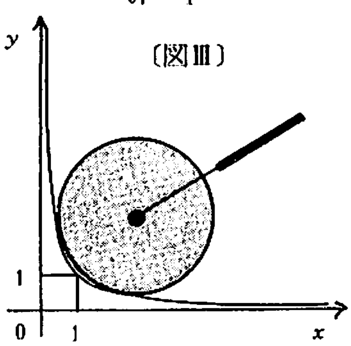
注意：点（1，1）を塗ることができれば他の部分はすべて塗れることは証明しなくてもよい。また図Ⅱ，Ⅲの断面図で考えればよい。



〔図Ⅰ〕



〔図Ⅱ〕



〔図Ⅲ〕

着眼点

現在の高校1年生，2年生は $y=\frac{1}{x}$ のような分数関数は中学で反比例のグラフとして扱って以来，3年で数学Ⅲで出てくるまで出番がないし，グラフの概形（双曲線）も数Cで選択科目として登場するのみで多くの生徒にとって縁の薄いものとなってしまった。この問題のような設定は多くの生徒にとって目新しいかもしれないが，興味をもってくれればありがたい。さらに $y=x^2$（放物線）や $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$（楕円）などに接する円についても考えてみるとおもしろいと思う。

(1) 数Aで相加・相乗平均の関係についてやっていればそれを使うのが一番簡単である。まだやっていない場合は $u=t+\frac{1}{t}$ より $\frac{t^2+1}{t}=u$ よって $t^2+1=ut$，$t^2-ut+1=0$ が正の解をもつめたの条件を調べるとよい。

(2) $y=\frac{1}{x}$ のグラフは直線 $y=x$ について対称より，条件を満たした点（1，1）を通る円の中心は直線 $y=x$ 上にあることに気づけば，円の中心 A（a，a）として点 A と円周上の点 P と最短距離が点（1，1）において生ずるような条件を考えるとよい。

解答例

(1) $t>0$ より（相加平均）≧（相乗平均）を用いて

$$t+\frac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}$$

ゆえに $t+\frac{1}{t}\geqq 2$　等号成立は $t=1$ のとき。……（答）

（別解）

$t+\frac{1}{t}=k$ とおき両辺を t 倍，整理すると

$t^2-kt+1=0$

t が正の実数解をもつ条件は，

$k>0$　かつ　$(-k)^2-4\times1\times1\geqq0$

すなわち　$k\geqq2$

$k=2$ のとき，$t^2-2t+1=0$ を解くと

$t=1$

ゆえに　$t+\frac{1}{t}\geqq2$，　$t+\frac{1}{t}=2$ となるのは $t=1$ のとき。……（答）

(2) 曲線 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ は，直線 $y=x$ に関して対称であるから，直線 $y=x$ 上の点 $A(a,\ a)$（ただし　$a>1$ とする）を中心とする円について調べる。

点（1，1）を P_1 とすると

$P_1A^2=(1-a)^2+(1-a)^2$

$=2a^2-4a+2$ ………①

曲線 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ 上の点を $P(t,\ \frac{1}{t})$ $(t>0)$ とすると

$PA^2=(t-a)^2+(\frac{1}{t}-a)^2$

$=t^2+\frac{1}{t^2}-2a(t+\frac{1}{t})+2a^2$

$=(t+\frac{1}{t})^2-2a(t+\frac{1}{t})+2a^2-2$

ここで $u=t+\frac{1}{t}$ とおくと(1)より $u\geqq2$ で

$PA^2=u^2-2au+2a^2-2$ ……②

点 A を固定したまま点 P を $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ 上で動かす。

(i) PA が最小になるときの点 P の位置が点 P_1 である場合。常に，$PA\geqq P_1A$ だから，中心が点 A の円の半径を P_1A とすれば，$y=\frac{1}{x}$ に点 P_1 で接する。

(ii) 点 P が P_1 以外の位置にあるとき PA が最小となる場合。その最小値を半径とし中心が点 A の円は，点 P_1 以外の点で $y=\frac{1}{x}$ に接する。円はローラーの断面だから，点 A を中心としたま

まで，これ以上半径を大きくできない。すなわちこの場合，円は点P_1に接することができない。

以上(i)，(ii) より，点Aの位置を固定したままですべての$t>0$に対して$PA \geqq P_1A$が成立するための，aの満たすべき条件を求める。

①，②を用いて　$f(u)=PA^2-P_1A^2$とおくと

$$f(u)=u^2-2au+4a-4$$
$$=(u-a)^2-(a-2)^2$$

すべての$u \geqq 2$に対し$f(u) \geqq 0$となる条件は，$y=f(u)$のグラフを考えて

（$a<2$　かつ$f(2) \geqq 0$）または（$a \geqq 2$　かつ$-(a-2)^2 \geqq 0$）

すなわち，$a \leqq 2$，これを満たし，円の半径が最大となるのは

$a=2$のときであり，$P_1A=\sqrt{(1-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$ ……（答）

5

次の各問に答えよ。

(1)　任意の実数a，bに対して，
$$||a|-|b|| \leqq |a-b|$$
が成り立つことを示せ。

(2)　関数$f(x)$を
$$f(x)=\left|\frac{1}{2}|x|-2\right|$$
と定める。任意の実数a，bに対して，
$$|f(a)-f(b)| \leqq \frac{1}{2}|a-b|$$
が成り立つことを示せ。

(3)　関数$g(x)$を
$$g(x)=f(f(f(x)))$$
と定める。任意の実数a，bに対して，
$$|g(a)-g(b)| \leqq \frac{1}{8}|a-b|$$
が成り立つことを示せ。

(4)　実数s，tが，
$$g(s)=s \quad かつ \quad g(t)=t$$
を満たすとき，$s=t$となることを示せ。

(5)　実数uが，$f(u)=u$を満たすならば，$g(u)=u$となることを示せ。

(6)　方程式$g(x)=x$を解け。

着眼点

式の意味や，出題の意図をよく考えてほしい問題です。

(2)は，$a=b$のときはどんな関数fに対しても明らかに成立する式なので，$a \neq b$のときが本質的である。このとき，両辺を$|a-b|$で割ると，

$$\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| \leqq \frac{1}{2}$$

となるので，これは$y=f(x)$のグラフ上の異なる2点を結んでできる線分の傾きが$-\frac{1}{2}$以上$\frac{1}{2}$以下であることを述べている。(2)では，いろいろな解答が考えられるが，(1)を使うのが楽である。

(3)は，(2)を繰り返し用いると簡単に出来る。

(4)は，方程式$g(x)=x$の解が存在すれば，それは唯一つであることを述べている。(3)の式の意味を考えると，(4)は直感的に納得できると思う。しかし，直感だけに頼らず丁寧に証明してほしいところである。

(5)はgの定義式からすぐにわかる。また，これは方程式$f(x)=x$の解が存在すれば，それはすべて方程式$g(x)=x$の解になることを述べている。

(6)では，(5)を利用することになるが，それだけでなく(4)を生かすことが出来るかがポイントになる。(6)を直接計算で求めるのは場合分けが大変なので，うまく誘導にのってほしい。

解答例

(1)　$|a-b|^2-||a|-|b||^2$
$$=(a^2-2ab+b^2)-(|a|^2-2|ab|+|b|^2)$$
$$=2(|ab|-ab)$$
$$\geqq 0$$

ゆえに，$||a|-|b|| \leqq |a-b|$　（証明おわり）

(2)　(1)を繰り返し利用すると，

$|f(a)-f(b)|$
$$=\left|\left|\frac{1}{2}|a|-2\right|-\left|\frac{1}{2}|b|-2\right|\right|$$
$$\leqq \left|\left(\frac{1}{2}|a|-2\right)-\left(\frac{1}{2}|b|-2\right)\right|$$
$$=\frac{1}{2}||a|-|b||$$
$$\leqq \frac{1}{2}|a-b|$$

ゆえに，$|f(a)-f(b)| \leqq \frac{1}{2}|a-b|$

（証明おわり）

(3)　(2)を繰り返し用いて

$|g(a)-g(b)|=$
$$=|f(f(f(a)))-f(f(f(b)))|$$
$$\leqq \frac{1}{2}|f(f(a))-f(f(b))|$$
$$\leqq \frac{1}{4}|f(a)-f(b)|$$
$$\leqq \frac{1}{8}|a-b|$$

ゆえに，$|g(a)-g(b)| \leqq \frac{1}{8}|a-b|$

（証明おわり）

(4)　$g(s)=s$，$g(t)=t$ のとき，(3)より

$$|s-t|\leqq\frac{1}{8}|s-t|$$

なので，

$$\frac{7}{8}|s-t|\leqq 0。$$

したがって，$|s-t|=0$。　ゆえに，$s=t$。

（証明おわり）

(5)　$f(u)=u$ のとき，

$$g(u)=f(f(f(u)))=f\ (f(u))$$
$$=f(u)=u$$

ゆえに，$g(u)=u$。　　　　（証明おわり）

(6)　(5)より，方程式 $f(x)=x$ が解をもてば，その解はすべて方程式 $g(x)=x$ の解になる。そこでまず $f(x)=x$ を解く。

$$\left|\frac{1}{2}|x|-2\right|=x$$

の左辺は0以上なので，$x\geqq 0$　よって，上式は

$$\left|\frac{1}{2}x-2\right|=x$$

となり，両辺を2乗して整理すると，

$$3x^2+8x-16=0$$
$$(x+4)(3x-4)=0。$$

$x\geqq 0$ より $x=\frac{4}{3}$。これは $f\ (x)=x$ を満たす。したがって $x=\frac{4}{3}$ は，方程式 $g(x)=x$ の解である。また，(4)より方程式 $g(x)=x$ の解は，$\frac{4}{3}$ 以外にはないことがわかる。

（答）$x=\frac{4}{3}$

第 14 回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

平成８年１月12日(金)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第14回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長　真　田　清　臣

昭和58年度（1983年）1月15日に第1回が実施された「数学コンテスト」も今回で第14回を迎えることができました。今年は全道24校から中学生を含む218名の高校生諸君の参加を得て盛大に開催できたことは関係者一同喜びにたえません。このコンテストに対する理解と数学に対する興味・関心や数学の重要性が認識されてきたことの表れとうれしく思うとともに，全道各地で熱心に指導に当っておられる先生方のご努力に深く感謝と敬意を表します。

この「数学コンテスト」は，アメリカや東欧諸国で行なわれていた“数学オリンピック”にヒントを得て，北海道においてもそれに似た催しを行ない，数学好きの高校生や中学生に刺激を与え，一層数学的な興味を高め，また数学に楽しく挑戦することを通して，潜在している数学的能力を引き出す手立てとして実施してきました。1989年から世界の50ケ国目として，日本も国際数学オリンピックに参加し，予選の日本数学オリンピックにおいて，本道の高校生が毎回優秀な成績を収めてきた，特に中国の北京で行われた第31回大会で札幌の高校生が銅メダルを受賞したことは大変嬉しいことでした。数学コンテストや数学オリンピックは，単に数学の問題を解く力を競い，それに優劣をつけるものではありません。この数学コンテストをとおして，数学教育本来の目標である基本的な概念や原理・法則，理論的思考力や創造的な考え方を自らがそれぞれの持っている能力に応じて問題を解決しながら身につけ，数学にたいする興味・関心を高めることにあります。21世紀に向けての高度情報化と国際化に数学の果す役割はますます重要であり，ひいては，Andrew Wiles先生のように何百年来の難問を解決できる資質を育んでいって欲しいと考えています。さらにこの数学コンテストをきっかけとして数学を愛する同好の士が増え，それぞれの学校で互いに励まし合いながら一層本道の数学の学力の水準を高めることに役立ちたいとも念願しています。

終わりになりましたが，北海道教育委員会，札幌市教育委員会，北海道高等学校校長協会より賜わりました援助並びに北海道新聞社，福武書店の物心両面にわたるご高配に厚くお礼申し上げるとともに，本年も問題作成について御尽力頂きました北海道大学理学部数学科，出題や採点からコンテストの運営全般にわたってご苦労いただいた北数教高校部会研究部，さらに全道各地で実施にご協力いただいた会場校や諸先生に厚くお礼申し上げます。今度ともご協力の程よろしくお願いいたします。

●成績優秀者

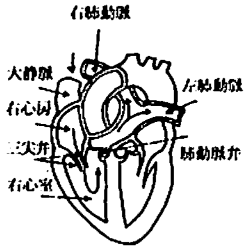
沖田紘一	森川真大	高橋洋介	笠島久司
鹿嶋　雅	中村　裕	吉田和幸	小谷　馨
池田基茂	吉澤一哲	佐伯知哉	杉浦　有
市原　真	中道祐希	篠崎洋介	川瀬智宏
佐藤　守	藤原　隼	日下博之	仲野賢治
工藤公載	水野拓成	藤原史枝	

第14回　数学コンテスト度数分布

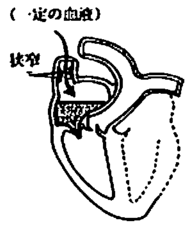
得点	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5
40	1	21	29	1	3
39	0	0	2	0	0
38	0	0	2	0	0
37	0	0	2	0	1
36	0	0	13	5	0
35	0	4	2	0	1
34	0	0	7	1	2
33	0	0	13	0	1
32	0	0	4	2	2
31	0	0	2	1	1
30	1	2	3	1	0
29	0	0	5	0	1
28	1	0	3	7	0
27	0	0	12	0	1
26	0	0	1	3	0
25	21	6	1	0	1
24	0	0	1	0	1
23	1	0	4	0	0
22	0	0	1	4	2
21	0	0	16	0	2
20	2	7	0	7	2
19	0	0	1	1	1
18	1	0	6	1	1
17	0	0	0	0	2
16	1	0	3	3	0
15	6	10	3	0	2
14	0	0	1	4	1
13	19	0	1	4	6
12	0	0	0	4	3
11	0	0	1	7	2
10	67	16	2	12	2
9	0	0	0	1	7
8	2	0	2	1	4
7	0	0	1	6	3
6	0	0	5	7	21
5	14	91	1	1	8
4	0	0	0	10	8
3	6	0	1	1	9
2	0	0	3	19	7
1	0	0	0	13	8
0	22	8	11	38	49
受験者数	165	165	165	165	165
総計	1831	2095	4296	1519	1253
平均点	11.10	12.70	26.04	9.21	7.59
S・D	7.70	12.64	12.35	10.42	9.75

階級	合計
200 ～ 200	0
195 ～ 199	1
190 ～ 194	0
185 ～ 189	0
180 ～ 184	0
175 ～ 179	0
170 ～ 174	0
165 ～ 169	2
160 ～ 164	1
155 ～ 159	0
150 ～ 154	2
145 ～ 149	1
140 ～ 144	0
135 ～ 139	1
130 ～ 134	4
125 ～ 129	5
120 ～ 124	1
115 ～ 119	5
110 ～ 114	1
105 ～ 109	2
100 ～ 104	4
95 ～ 99	5
90 ～ 94	7
85 ～ 89	5
80 ～ 84	8
75 ～ 79	5
70 ～ 74	6
65 ～ 69	10
60 ～ 64	5
55 ～ 59	10
50 ～ 54	15
45 ～ 49	8
40 ～ 44	12
35 ～ 39	9
30 ～ 34	4
25 ～ 29	4
20 ～ 24	4
15 ～ 19	9
10 ～ 14	2
5 ～ 9	7
0 ～ 4	0
165	
10994	
66.63	
38.45	

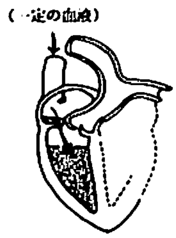
1



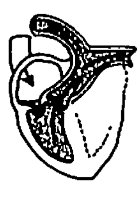
左図は，心臓の断面である。全身より大静脈に集まった血液は，右心房にたまり，右心室の拡張ともに，三尖弁口を通って右心室に流入した後，右心室の収縮により，右心室から肺動脈弁口を経て，肺動脈に送られる。



(1) 大静脈より，右心房に絶えず一定の血液が流入している。健康な時は$\frac{5}{100}$秒で右心房は血液で充満されるが，今，大静脈に狭窄があり血流が悪くなったため，健康時よりも$\frac{3}{100}$秒右心房に血液が充満されるのが遅くなった。健康時と大静脈狭窄時との血液流入量の比を求めよ。



(2) 右心房が血流で充満すると，血液は三尖弁口を通って右心室へ送られるが，三尖弁口が狭くなり$\frac{7}{100}$秒で右心房の血液はなくなるが，三尖弁口を2倍に広げると$\frac{3}{100}$秒でなくなった。三尖弁口を何倍に広げると$\frac{5}{100}$秒で，右心房の血液は右心室に全て送り出されるか。



(3) 右心室に充満した血液は，右心室の収縮により肺動脈弁口を通って，肺動脈によって肺に送られる。肺の手術のため，左肺動脈を閉鎖し，右肺動脈だけで右心室から血液を送り出せば，右肺動脈を閉鎖し，左肺動脈だけで血液を送り出すよりも$\frac{2}{10}$秒多くかかり，閉鎖せず左右両肺動脈で血液を送り出す場合より$\frac{7}{10}$秒多くかかる。

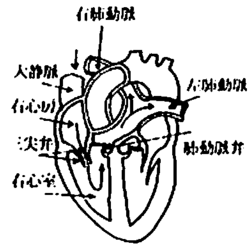
(i) 左肺動脈を閉鎖し，右肺動脈だけの時右心室から血液を送り出すのに何秒かかるか。

(ii) 右肺動脈を閉鎖し，左肺動脈だけの時，右心室から血液を送り出すのに何秒かかるか。

講　評　**解答例**

(1)

未知数の文字を置き換え，正しく処理できるかどうかを問う問題



自動車に乗る時に気がつくとおもいますが，時速40kmの車は1時間で40kmの距離を走る事を意味する。ではこの時1kmの距離を走るのには何時間かかるか？

1時間で40kmの距離を走るのだから，1km走るのには$\frac{1}{40}$時間かかる事がわかる。

さて　問題1に関しても

$$（単位時間の血液流入量）=\frac{1}{（血液が充満するのに要する時間）}$$

の関係を用いるとよい。

健康な時右心房に血液が充満される時間：5／100秒

静脈狭窄時の右心房に血液が充満される時間：5／100＋3／100秒

従って

健康時は1秒間に100／5，静脈狭窄時は1秒間に100／8の血液流入量がある。

健康時：静脈狭窄時＝

100／5 : 100／8 ＝ 8 : 5 ・・・（答え）

基本的な問題とあって多くの生徒が正解でした。

ところが，100／5 : 100／8 ＝ 5 : 8と答えている生徒が15人いました。基本的な比の概念をもう一度復習しておく必要があります。

(2)

単位時間の三尖弁口血液通過量と，大静脈から右心房への血液流入量を未知数として(1)の関係式を利用して考える。

a：右心房が血液で充満し三尖弁口を通過し始めるまでの右心房の血液量

x：1秒間に三尖弁口を通過する血液量

y：1秒間に大静脈から右心房への血液流入量

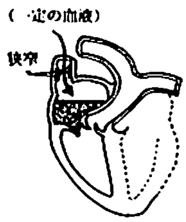
とおく

$$\frac{a}{x-y}=\frac{7}{100}\cdots①\qquad\frac{a}{2x-y}=\frac{3}{100}\cdots②$$

①，②からaを消去すると

$$a = \frac{7}{100}(x - y)$$

$$= \frac{3}{100}(2x - y)$$



$x = 4y \qquad \therefore x : y = 4 : 1$

三尖弁口をm倍にすると

$$\frac{a}{mx-y} = \frac{7(x-y)}{100} \times \frac{1}{mx-y}$$

$x = 4k$，$y = k$を代入

$$\frac{a}{mx-y} = \frac{7(4k-k)}{100(m \cdot 4k-k)} = \frac{21k}{100(4mk-k)}$$

$$= \frac{21k}{100(4m-1)k} = \frac{21}{100(4m-1)}$$

題意より

$$\frac{21}{100(4m-1)} = \frac{5}{100} \qquad \frac{21}{4m-1} = 5$$

$21 = 20m - 5$，$20m = 26$

$$\therefore m = \frac{26}{20} = \frac{13}{10} = 1.3$$

1.3倍にする。

ところが

(2)の問題文には記述しませんでしたが，絶えず大静脈から右心房へ一定の血液が流入している事を，数式化しない生徒がとても多くて残念でした。

そのなかで，良く考え解答の説明もパーフェクトに答えられている生徒は，4名いました。

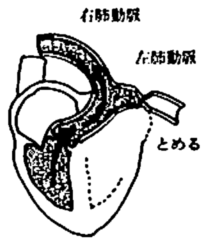
鹿嶋雅君（札幌東2年），沖田紘一君（札幌北2年），佐藤守君（北嶺1年），吉田和幸君（小樽潮陵2年）

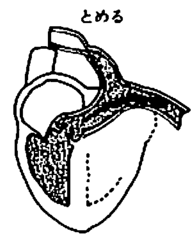
以上の4名はていねいな解答でよく分析し立派な答案でした。

(3)

（右肺動脈の単位血液流出量）+（左肺動脈の単位血液流出量）=（左右肺動脈の単位血液流出量）の関係を用いるとよい。

（i）右肺動脈だけで，右心室から血液を送り出すのにx秒かかるとすると，左肺動脈だけで血液を送り出すのに$x - \frac{2}{10}$秒かかり，左右両肺動脈では，$x - \frac{7}{10}$秒かかる。





右肺動脈の1秒間の血液流出量

$$= \frac{1}{x}$$

左肺動脈の1秒間の血液流出量

$$= \frac{1}{x - \frac{2}{10}}$$

左右肺動脈の1秒間の血液流出量

$$= \frac{1}{x - \frac{7}{10}}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \frac{2}{10}} = \frac{1}{x - \frac{7}{10}}$$

分母を払って $\left(x - \frac{2}{10}\right)\left(x - \frac{7}{10}\right)$

$$+ x\left(x - \frac{7}{10}\right) = x\left(x - \frac{2}{10}\right)$$

$$x^2 - \frac{14}{10}x + \frac{14}{100} = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{35}}{10} \qquad x > \frac{7}{10} \text{ より } \frac{7 + \sqrt{35}}{10} \text{（秒）}$$

（ii）（i）より，$x - \frac{2}{10} = \frac{5 + \sqrt{35}}{10}$（秒）

解答および解説の中で解答例に誤りがありました，深くお詫び申し上げます。

今回の基礎問題は自然現象を頭の中で実験してシュミレーションし数式化してみることをテーマにしてみました。最近ではコンピューターの進歩にともなって，これらの情報をコンピューターに入力し，仮想実験してみることが盛んに実施されています。今後，医学をはじめとする自然科学にはコンピューターシュミレーションが益々必要になると思われます。

2

△ABCがあって∠B＝2∠Cとなっている。

(1) CBの延長上にAB＝BDとなるように点Dを取れ。

注：点Dは解答用紙に与えられてある△ABCの図をもとにして取ること。

free handでよい。尚(2)(3)に必要な図も，この図につけ加える。

(2) $DA^2 = DB \cdot CD$が成り立つことを証明せよ。

(3) $AC^2 = AB(AB + BC)$で成り立つことを証明せよ。

講　評

(1) 図を書けない人が8人いた。DをBC上にとったためである。問題をよく読んでほしい。

(2) AB＝BD と AD^2＝DB・DC＝AB・DC から△ADC∽△BAD を証明すればよいとした人がいた。（帯広柏葉高校：水野君他），「逆から考える」こと（分析）は問題解決の有力な方法である。

三平方の定理・余弦定理を使った人もいたが、初級幾何による解法の美しさに比べてると，鈍重な感じがする。なお「方べきの定理」（円と接線の関係）を利用したのは3名であった。

なお，この定理はよく利用される定理である。

(3) (2)でAD＝ACに気が付いた人はほとんどできていた。

幾何の問題を解くとき「補助線を引く」ことが大きなウエィトをもつ。ここの問題の後に次の問題を解いてほしい。

△ABC において，∠A＝2∠Bならば，BC^2＝AC（BC＋AC）が成り立つことを証明せよ。

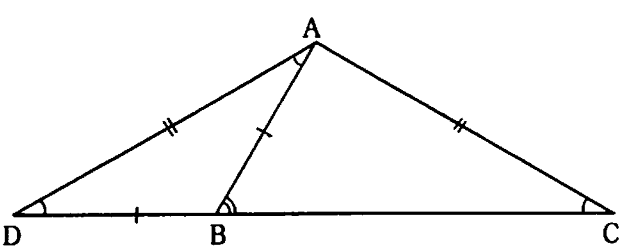
得点分布

得点 x	度数 f	xf
0	8	0
5	91	455
10	16	160
15	10	150
20	7	140
25	6	150
30	2	60
35	4	140
40	21	840
計	165	2095

$m=12.7$

解答例

(1) 図の(2)(3)の分まで示してある。



(2) BD＝BA から∠D＝∠DAB，∠D＋∠DAB＝∠ABC＝2∠C

∴∠D＝∠C　△ADC，△BAD で二角相等

△ADC∽△BAD　$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BA}{AD}$

∴DA^2＝AB・DC＝DB・DC

3

次の問に答えよ。

(1) 整数 n に対して，$N=3n^2+n+2$ は偶数となることを示せ。

(2) 整数 a，b，c に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。

① $f(1)$，$f(2)$ が偶数となるとき

(ア) $a+b$，c の値が偶数であることを示せ。

(イ) $f(3)$ の値が偶数となることを示せ。

② ある整数 k に対して，$f(k)$，$f(k+1)$ が偶数になるとき，

(ア) $a+b$，c の値が偶数であることを示せ。

(イ) 任意の整数 n に対して，$f(n)$ の値が偶数となることを示せ。

講　評

配点 (1) 6点，(2)①（ア）a＋b：5点，c：5点（イ）5点②（ア）a＋b：6点，c：6点（イ）7点

(1) 解答は大きく分けると次の3通りである。

・式変形による

・n が奇数，n が偶数による場合分け

・数学的帰納法を用いる

帰納法を用いた受験生の多くは，n が自然数で終わっているため減点となった。

自然数から整数について証明する場合，$n=0$ のとき，$n=-m$（mは自然数）のときを確かめればよい。

(2) ①（ア）細かく分けると大変多くの解答があったが，大きく分けると

・$f(2)$より c が偶数を示し，$f(1)$より $a+b$ が偶数であることを示す。

・$f(2)-f(1)=3a+b$＝偶数などの式より，$a+b$，c が偶数であることを示す。

①（イ）については，

・式変形（$3a+b$＝偶数の利用もある）

・$a+b$＝偶数より，a，b がともに奇数，偶数であることから

②の(ア)についても①の(ア)と同様である。

②の(イ)については(1)と同様な解答が多く，ここでもやはり帰納法を利用した受験生が多かった。

全体的に「式変形による証明」「奇数＋奇数＝偶数，偶数＋偶数＝偶数となることを利用した証明」の２通りの解法があった。今までのコンテストの問題としては，大変やさしい問題であり，高得点も多かった。しかし，毎年のように解答の書き方が悪かったり，説明不足の答案が多くあった。

解答例

(1) nが偶数のとき，明らかにNは偶数となる。

nが奇数のとき，$n=2j+1$とおく（jは整数）

$$N=3(2j+1)^2+(2j+1)+2$$
$$=12j^2+12j+3+2j+1+2$$
$$=12j^2+14j+6=2(6j^2+7j+3)$$

よって，Nは偶数となる。

(別解) $N=n^2+2n^2+n+2=n(n+1)+2(n^2+1)$

$n(n+1)$は偶数なので，よってNは偶数となる。

(2)①

(ア) $f(1)=a+b+c=2p$とおく。

$f(2)=4a+2b+c=2q$おく

$f(2)-f(1)=3a+b=2(q-p)$

ゆえに，$3a+b$が偶数なので

aが偶数のとき，bも偶数となり，$a+b$は偶数となる

aが奇数のとき，bも奇数となり，$a+b$は偶数となる

よって，$a+b$は偶数となる。

次に，$a+b+c=2p$より

$c=2p-(a+b)$

$a+b$は偶数なので，cは偶数となる。

(イ) $f(3)=9a+3b+c$

$a+b$は偶数なので，$a+b=2r$とおく

このとき，$b=2r-a$を代入すると

$f(3)=9a+3(2r-a)+c$

$=6a+6r+c$

cは偶数なので，よって$f(3)$は偶数となる

②(ア) $f(k)=ak^2+bk+c=2u$とおく。

$f(k+1)=a(k+1)^2+b(k+1)+c=ak^2+(2a+b)k+a+b+c=2v$とおく。

このとき，$f(k+1)-f(k)=2ak+a+b=2(v-u)$

ゆえに，$a+b=2(v-u)-2ak=2(v-u-ak)$

よって，$a+b$は偶数となる。

次に，$a+b$は偶数なので，$a+b=2m$とおく。

$b=2m-a$を$f(k)$の式に代入すると

$f(k)=ak^2+(2m-a)k+c=2L$

$c=2L-2mk-ak(k-1)$

$k(k-1)$は偶数であるので，よってcは偶数である。

(別解) kが偶数のとき，$f(k)=ak^2+bk+c=k(ak+b)+c$が偶数であることから，

$k(ak+b)$は偶数なのでcは偶数となる。

kが奇数のとき，$f(k+1)=a(k+1)^2+b(k+1)+c$

$=(k+1)(ak+a+b)+c$が偶数であることから，

$(k+1)(ak+a+b)$は偶数なのでcは偶数となる。

よって，cは偶数となる。

(イ) $b=2m-a$より

$f(n)=an^2+(2m-a)n+c$

$=an(n-1)+2mn+c$

$n(n-1)$，cは偶数なので，よって$f(n)$は偶数となる。

(別解) $a+b$が偶数であることから，a，bは共に偶数または共に奇数である。

a，bが共に偶数のときは明らかに成り立つ。

a，bが共に奇数のとき，$a=2s+1$，$b=2t+1$とおくと

$f(n)=an^2+bn+c$

$=(2s+1)n^2+(2t+1)n+c$

$=2(sn^2+tn)+(n^2+n)+c$

よって，cは偶数，$n^2+n=n(n+1)$も偶数なので，$f(n)$は偶数である。

(Q. E. D.)

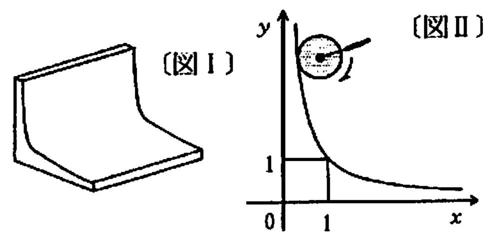
4

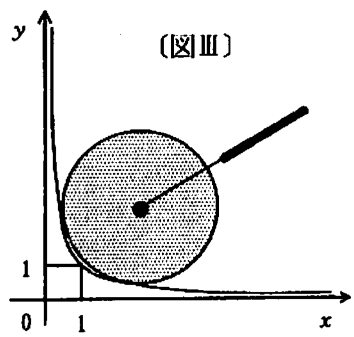
(1) tが正の実数のとき，$u=t+\frac{1}{t}$の取りうる値の範囲を求めよ。

また，$u=t+\frac{1}{t}$が最小になるときのtの値を求めよ。

(2) 図Ⅰのような曲面の壁があり，真横から見た断面は図Ⅱのように$y=\frac{1}{x}(x>0)$で表せる。この曲面を円筒型のローラを用いて

図Ⅱのように塗装する。ローラの半径をなるべく大きくしたいのだが，大きすぎると図Ⅲのように塗装できない部分ができてしまう。
点（1，1）の部分を塗装できるようなローラの最大半径を求めよ。
注意：点（1，1）を塗ることができれば他の部分はすべて塗れることは証明しなくてもよい。また図Ⅱ，Ⅲの断面図で考えればよい。





講　評

配点 (1)10点 (2)30点。

(1)については，相加平均・相乗平均の関係を知らない人には難しかったと思います。

解答例の（別解）のような答案もいくつか見られました。もっとも，（別解）の方法も，「知らずにいてその場で思い付く」にはちょっと難しかったかも知れません。直観的に「$u \geqq 2$」，「uが最小のとき$t=1$」と考え，何とかその理由を記そうと苦心した答案が非常に多くありました。今回は，「$u \geqq 2$」，「$t=1$」だけで理由の無いものにも各1点を（答えようという姿勢を評価する意味で）与えました。しかし，本格的な数学の議論には，厳密性は欠かせないということを，この機会に覚えておいて欲しいと思います。そして，厳密な議論をするには，式を立てて話を進めることが大変有効な方法なのです。

(2)については，（半径）$=\sqrt{2}$ と答えた人は20名程度しました。しかし，ほとんどの答案では $\sqrt{2}$ が最大であることについての十分な考察がなかったため，満点を与えられるものは1人だけでした。この点について，少し述べておきます。

解答例は高校1年の履修状況に配慮したものです。しかし，（半径）$=\sqrt{2}$ を得た人の多くが（高1や中学生でもよく勉強しているなと感心しましたが）円の方程式と，$y=\dfrac{1}{x}$ を連立させて，「(1，1）のみが唯一の共有点となる…①」ように半径を決定していました。この方針には何も問題がないのですが，途中に落とし穴があるのです。
半径をrとすると，「xの方程式

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(2+\sqrt{2}r)\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\sqrt{2}r=0$$

が，1を唯一の実数解としてもつ」が，①と同値な命題になります。ここで$u=x+\dfrac{1}{x}$
とおいて

$$u^2-(2+\sqrt{2}r)u+2\sqrt{2}r=0 \cdots ②$$

を得ます。これが2を重解としてもつように半径rを決定した人が多く，そしてそれが間違いのもとなのです。①と同値な命題は，正しく述べると，「②が2を重解にもつ，または，2と2未満の実数の2つの解をもつ」…③となるのです。問題(1)を思い出して，理由を考えてみてください。③の前半部分から$r=\sqrt{2}$ が，後半部分から$r<\sqrt{2}$ が得られます。そこで初めて，max　$r=\sqrt{2}$ を得られるのです。③の後半部分を示していなければ，半径rの取り得る値は調べ尽くされていないので，$r=\sqrt{2}$ が最大であるという証拠は示されていないことになってしまいます。

高校生の段階で，形式的な厳密性にはあまりこだわる必要はないでしょうが，本質にかかわる議論には注意深く臨まないと，命題の真偽がひっくり返ってしまうことこさえあります。証明問題の苦手な人も（もちろん得意な人も）「すべての可能性を検討したかどうか」を常に意識して欲しいものです。

解答例

(1)　$t>0$より（相加平均）≧（相乗平均）を用いて

$$t+\frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}}$$

ゆえに$t+\dfrac{1}{t} \geqq 2$　等号成立は$t=1$のとき。……（答）

（別解）

$t+\dfrac{1}{t}=k$とおき両辺をt倍，整理すると

$t^2-kt+1=0$

tが正の実数解をもつ条件は，

$k>0$　かつ　$(-k)^2-4\times1\times1 \geqq 0$

すなわち　$k \geqq 2$

$k=2$のとき，$t^2-2t+1=0$を解くと

$t=1$

ゆえに　$t+\dfrac{1}{t}\geqq 2$，　$t+\dfrac{1}{t}=2$となるのは$t=1$のとき。……（答）

(2) 曲線$y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）は，直線$y=x$に関して対称であるから，直線$y=x$上の点$A(a,\ a)$（ただし　$a>1$とする）を中心とする円について調べる。

点（1，1）をP_1とすると

$$P_1A^2=(1-a)^2+(1-a)^2$$
$$=2a^2-4a+2\cdots\cdots①$$

曲線$y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）上の点を$P(t,\ \dfrac{1}{t})$（$t>0$）とすると

$$PA^2=(t-a)^2+\left(\frac{1}{t}-a\right)^2$$
$$=t^2+\frac{1}{t^2}-2a\left(t+\frac{1}{t}\right)+2a^2$$
$$=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2a\left(t+\frac{1}{t}\right)+2a^2-2$$

ここで$u=t+\dfrac{1}{t}$とおくと(1)より$u\geqq 2$で

$$PA^2=u^2-2au+2a^2-2\cdots\cdots②$$

点Aを固定したまま点Pを$y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）上で動かす。

(i) PAが最小になるときの点Pの位置が点P_1である場合。常に，$PA\geqq P_1A$だから，中心が点Aの円の半径をP_1Aとすれば，$y=\dfrac{1}{x}$に点P_1で接する。

(ii) 点PがP_1以外の位置にあるときPAが最小となる場合。その最小値を半径とし中心が点Aの円は，点P_1以外の点で$y=\dfrac{1}{x}$に接する。円はローラーの断面だから，点Aを中心としたままで，これ以上半径を大きくできない。すなわちこの場合，円は点P_1に接することができない。

以上(i)，(ii)より，点Aの位置を固定したままですべての$t>0$に対して$PA\geqq P_1A$が成立するための，aの満たすべき条件を求める。

①，②を用いて　$f(u)=PA^2-P_1A^2$とおくと

$$f(u)=u^2-2au+4a-4$$
$$=(u-a)^2-(a-2)^2$$

すべての$u\geqq 2$に対し$f(u)\geqq 0$となる条件は，$y=f(u)$のグラフを考えて

（$a<2$　かつ$f(2)\geqq 0$）または（$a\geqq 2$　かつ$-(a-2)^2\geqq 0$）

すなわち，$a\leqq 2$，これを満たし，円の半径が最大となるのは

$a=2$のときであり，$P_1A=\sqrt{(1-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$ ……（答）

5

次の各問に答えよ。

(1) 任意の実数a，bに対して，

$$||a|-|b||\leqq|a-b|$$

が成り立つことを示せ。

(2) 関数$f(x)$を

$$f(x)=\left|\frac{1}{2}|x|-2\right|$$

と定める。任意の実数a，bに対して，

$$|f(a)-f(b)|\leqq\frac{1}{2}|a-b|$$

が成り立つことを示せ。

(3) 関数$g(x)$を

$$g(x)=f(f(f(x)))$$

と定める。任意の実数a，bに対して，

$$|g(a)-g(b)|\leqq\frac{1}{8}|a-b|$$

が成り立つことを示せ。

(4) 実数s，tが，

$$g(s)=s\quad かつ\quad g(t)=t$$

を満たすとき，$s=t$となることを示せ。

(5) 実数uが，$f(u)=u$を満たすならば，$g(u)=u$となることを示せ。

(6) 方程式$g(x)=x$を解け。

講　評

配点：(1) 6点，(2)〜(4)各7点，(5) 6点，(7) 7点，計40点。

全体的には，答案の書き方がよくないものが多かった。

特に(1)では，場合分けを沢山した上，逆から読んでいかないと意味がとれないものがあった。答案は，採点者に見てもらうものであるから，筋道をたてて書くように心掛けよう。また，(1)，(2)，(3)において「$a\geqq 0$，$b<0$のとき」，「$b\geqq 0$，$a<0$のとき」など，いろいろ場合分けしているものが多かったが，aとbの対称性から，場合分けの数を減らすことができる。“$a\geqq b$として，一般性を失わない”などとすればよい。

(1)で，$|x+y|\leqq|x|+|y|$を既知として解答しているものがあり，

$|a|\leqq|a-b|+|b|$から，

$$|a|-|b|\leqq|a-b|\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

まではよいのだが，ここで，

$$||a|-|b||\leqq||a-b||=|a-b|$$

としはいけない。これでは「$x\leqq y\Rightarrow|x|\leqq|y|$」と言っているようなものだ（そうでなくとも，そうとられる）。これは，もちろん正しくない。①

で，aとbを入れ換えて，

$$|b|-|a|\leqq|a-b|\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

とか，①と同様にして②が導かれる，などとして，①，②から，

$$||a|-|b||\leqq|a-b|$$

とすべきであろう。

スマートな解答が出来れば，それにこしたことはないが，ゴリゴリ計算していくのもよい。いざという時にはそうするし，計算力は大切だからだ。(2)，(3)で，(1)を使わず，直接証明してあるものもあった。それはそれでよいと思う。ただ，途中で(1)が利用できることに気づき答案にいらないことを書いたり，めちゃくちゃなっているものもあった。もう少し整理して書いてもらいたい。

(4)では，「$g(x)=x$の解は１つしかないので，$s=t$となる」という答案が２，３あった。これでは，ごまかしているか，問題を言い換えているにすぎない。「"$g(x)=x$の解は高々１つしかない" これを示せ。」というのが(4)の問題である。

(5)は出来ている生徒が多かった。これは，やさしかったようだ。

(6)では，(4)を利用していないか，または，(4)を使ったことを答案に書いていないものがほとんどであった。(5)の意味は「$f(x)=x$の解があれば，それはすべて$g(x)=x$の解になっている。」ということである。$f(x)=x$の解と$g(x)=x$の解が一致すると言っているわけではない。(5)だけでは，$g(x)=x$の解で$f(x)=x$の解になっていないものがあるかもしれないのである。これを補うのが(4)であり，(4)と(5)から，「$f(x)=x$の解があれば，それは唯一で，$g(x)=x$の解に一致する」ということがわかる。

前に配られた解答の「着眼点」と「解答例」をよく読んでほしい。

今回，満点（40点）は３人であった。この３人の答案は，とてもよく書けている。また，30点以上の生徒は，(6)で(4)を生かせなかったり，ケアレスミスがあったものの，解答の組み立てや，答案の書き方は，しっかりしている。

これからも，自信をもって勉強してほしい。

解答例

(1) $|a-b|^2-||a|-|b||^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-(|a|-2|ab|+|b|)$

$=2(|ab|-ab)$

$\geqq 0$

ゆえに，$||a|-|b||\leqq|a-b|$　　（証明おわり）

(2) (1)を繰り返し利用すると，

$|f(a)-f(b)|$

$=\left|\left|\frac{1}{2}|a|-2\right|-\left|\frac{1}{2}|b|-2\right|\right|$

$\leqq\left|\left(\frac{1}{2}|a|-2\right)-\left(\frac{1}{2}|b|-2\right)\right|$

$=\frac{1}{2}||a|-|b||$

$\leqq\frac{1}{2}|a-b|$

ゆえに，$|f(a)-f(b)|\leqq\frac{1}{2}|a-b|$

（証明おわり）

(3) (2)を繰り返し用いて

$|g(a)-g(b)|=$

$=|f(f(f(a)))-f(f(f(b)))|$

$\leqq\frac{1}{2}|f(f(a))-f(f(b))|$

$\leqq\frac{1}{4}|f(a)-f(b)|$

$\leqq\frac{1}{8}|a-b|$

ゆえに，$|g(a)-g(b)|\leqq\frac{1}{8}|a-b|$

（証明おわり）

(4) $g(s)=s$，$g(t)=t$のとき，(3)より

$|s-t|\leqq\frac{1}{8}|s-t|$

なので，

$\frac{7}{8}|s-t|\leqq 0$。

したがって，$|s-t|=0$。　ゆえに，$s=t$。

（証明おわり）

(5) $f(u)=u$のとき，

$g(u)=f(f(f(u)))=f(f(u))$

$=f(u)=u$

ゆえに，$g(u)=u$。　　（証明おわり）

(6) (5)より，方程式$f(x)=x$が解をもてば，その解はすべて方程式$g(x)=x$の解になる。そこでまず$f(x)=x$を解く。

$\left|\frac{1}{2}|x|-2\right|=x$

の左辺は０以上なので，$x\geqq 0$　よって，上式は

$\left|\frac{1}{2}x-2\right|=x$

となり，両辺を２乗して整理すると，

$3x^2+8x-16=0$

$(x+4)(3x-4)=0$。

$x\geqq 0$より$x=\frac{4}{3}$。これは$f(x)=x$を満たす。したがって$x=\frac{4}{3}$は，方程式$g(x)=x$の解である。また，(4)より方程式$g(x)=x$の解は，$\frac{4}{3}$以外にはないことがわかる。

（答）$x=\frac{4}{3}$

担 当 委 員

坂 下 正 雄	中 西 勝 範
佐々木 光 憲	古 川 政 春
鈴 木 雅 博	松 本 睦 郎
棚 橋 　 純	皆 川 一 雄
中 居 基 昭	湊 川 三 竿
長 尾 　 章	大 和 達 也
中 田 保 之	和 田 文 興
永 渕 敬 二	