

第 13 回
北海道高等学校数学コンテスト

問 題

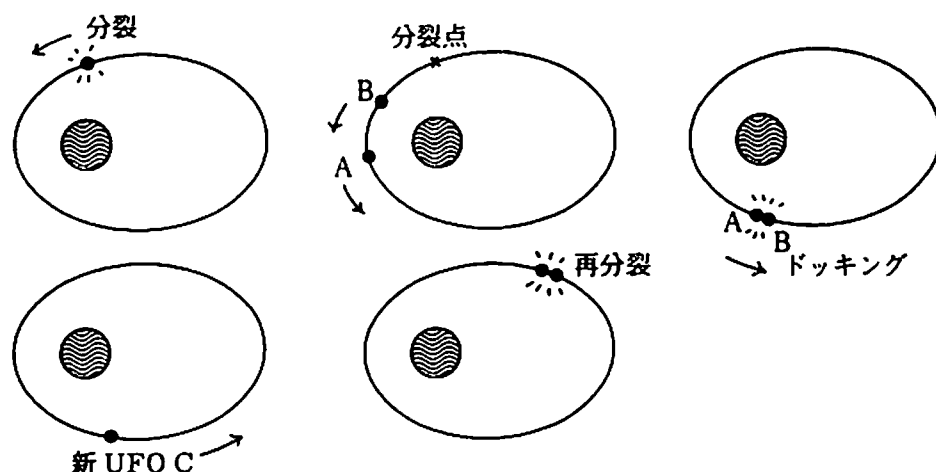
平成 7 年 1 月 12 日(木)

9 時 00 分～12 時 30 分(210 分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

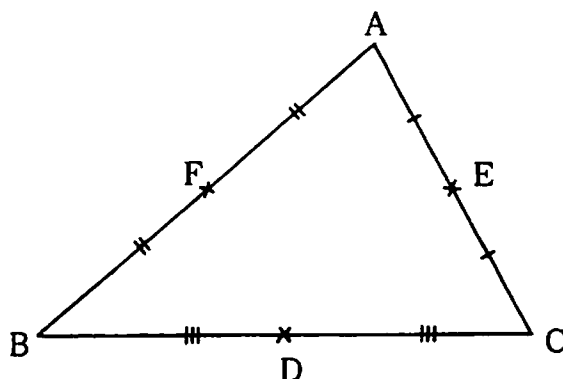
問題 1 木星を周回する UFO について次の小問に答えよ。

- (1) 木星を周回する UFO が今同じ向きに周回する 2 つの UFO A, B に分裂した。
A の速さは, v (km/時), B の速さは, v^2 (km/時) で ($0 < v < 1$) とする。UFO A, B が分裂後, 又ドッキングするまでの時間を最小にする v の値を求めよ。
ドッキング後, 新 UFO C が誕生した。誕生後, t 時間に進む距離は, $at^2 + bt$ と表される。はじめの 5 時間で第 1 周し, 3 時間後に第 2 周した。
- (2) 周回軌道の 1 周の長さを a で表せ。
- (3) 新 UFO C の第 3 周にかかる時間を求めよ。
- (4) 1 周にかかる時間が 1 時間以内になると, 再分裂するという第何周目の時に再分裂するか。



問題 2 $\triangle ABC$ があって, 辺 BC, CA, AB の中点を, それぞれ D, E, F とする。

- 問 1 E を通って線分 AC に垂直で長さがその 2 分の 1 の線分 EH
F を通って線分 AB に垂直で長さがその 2 分の 1 の線分 FG
この 2 つの線分を三角形の外側に書け。
(以下追加の図は free hand でよいが, ていねいに書くこと)
- 問 2 $EH = FD$, $FG = ED$ を証明せよ。
- 問 3 $DH \perp DG$, $DH = DG$ を証明せよ。



問題 3 互いに素である 2 つの自然数 a, b ($a > b$) に対して, $a^2 - b^2$ が平方数 (自然数の平方) であるとき, $a+b$ と $a-b$ はともに平方数であるか, またともに平方数の 2 倍であることを示す。次の手順にそって考えよう。

- (1) $a+b, a-b$ はともに偶数か, とともに奇数であることを示せ。
- (2) $m^2 = a^2 - b^2$ とする。 m が奇数の素数 p を約数とするとき, $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方が p^2 を約数として持つことを示せ。
- (3) (1), (2)を利用して $a+b, a-b$ はともに平方数であるか, またはともに平方数の 2 倍であることを示せ。

問題 4 $C(x), S(x)$ はすべての実数で定義された異なる実数値関数で, 任意の実数 a, b に対して

$$C(a+b) = C(a)C(b) - S(a)S(b) \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \text{を満たしている。}$$

$$S(a+b) = S(a)C(b) + C(a)S(b) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$F(x) = [C(x)]^2 + [S(x)]^2$ とするとき, 次の各問に答えよ。

- (1) ①を利用して, $C(0) \neq \frac{1}{2}$ を示せ。
- (2) ②を利用して, $S(0)$ の値を求めよ。
- (3) $C(0)$ の値を求めよ。
- (4) $F(a+b) = F(a) \cdot F(b)$ が成り立つことを示せ。
- (5) $F(1) > F(0)$ のとき, 任意の実数 x に対し $F(x+1) > F(x)$ が成り立つことを示せ。

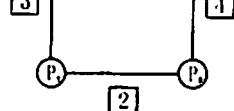
問題 5 n 人の各人が, 他人の知らない独自のゴシップ情報を持っている。電話によって, n 人が互いに情報を交換しあうとき, A と B の 2 人の間で交わされる 1 回の通話で, A, B それぞれがその時点で持っている情報すべてを互いに相手に伝えあうものとする。このとき, n 人全員が n 種類の情報すべてを入手するために必要な最小通話回数を a_n とする。ただし, $n \geq 4$ である。次の問に答えよ。

例 1 4 人のとき ① ㊸と㊸が通話する

② ㊸と㊸が通話する

③ ㊸と㊸が通話する

④ ㊸と㊸が通話する



これで 4 人とも全ての情報を得
ることができたので, $a_4 = 4$

例 2 5 人のとき ① ㊸と㊸が通話する

② ㊸と㊸が通話する

③ ㊸と㊸が通話する

④ ㊸と㊸が通話する

⑤ ㊸と㊸が通話する

⑥ ㊸と㊸が通話する



これで 5 人とも全ての情報を得
ることができたので, $a_5 = 6$

※注意 ㊸が人間, ㊸と㊸をつなぐ線分が, その 2 人が通話したことを表し, □
の数字が全体で何番目に行われた通話であることを表している。

- (1) $a_6 = 8$ となることを解答用紙の図に示せ。
- (2) a_7 を求めよ。
- (3) $a_n \leq a_{n-1} + 2$ となることを説明せよ。
- (4) $a_n \leq 2n - 4$ となることを示せ。

平成 6 年度(平成 7 年 1 月12日実施)

第 13 回

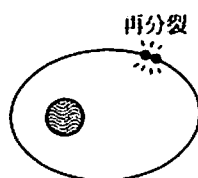
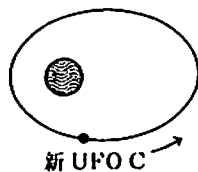
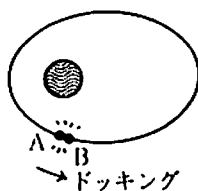
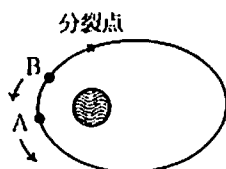
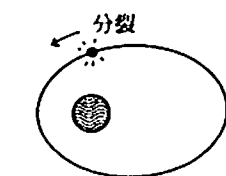
北海道高等学校数学コンテスト

解 答 と 解 説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

木星を周回する UFO について次の小問に答えよ。



- (1) 木星を周回する UFO が今同じ向きに周回する 2 つの UFO A, B に分裂した。A の速さは, v (km/時), B の速さは, v^2 (km/時) で ($0 < v < 1$) とする。UFO A, B が分裂後, 又ドッキングするまでの時間を最小にする v の値を求めよ。

ドッキング後, 新 UFO C が誕生した。誕生後, t 時間に進む距離は, $at^2 + bt$ と表される。はじめの 5 時間で第 1 周し, 3 時間後に第 2 周した。

- (2) 周回軌道の 1 周の長さを a で表せ。
 (3) 新 UFO C の第 3 周にかかる時間を求めよ。
 (4) 1 周にかかる時間が 1 時間以内になると, 再分裂するという第何周目の時に再分裂するか。

着眼点

2 次方程式, 連立方程式, 無理不等式の問題です。

- ① 文章を読んで, 数式を組み立てることができること。
 ② 実数条件, $\sqrt{\quad}$ の解法等, 計算力に頼る所もあります。

解答例

- (1) 周囲を l , 分裂後再ドッキングするまでの時間を t とする。

$$l = t \times (v - v^2)$$

$$\therefore tv^2 - tv + l = 0 \cdots \cdots ①$$

v が実数であるためには

$$\text{判別式 } t^2 - 4tl \geq 0 \quad t(t - 4l) \geq 0$$

$$\therefore t \leq 0, t \geq 4l \quad t \leq 0 \text{ は不適}$$

$$\therefore t \geq 4l$$

t の最小値は $4l$ $t = 4l$ を①へ代入

$$4lv^2 - 4lv + l = 0 \quad l \neq 0 \text{ より } (2v - 1)^2 = 0$$

$$\therefore v = \frac{1}{2}$$

$$(2) \begin{cases} l = 25a + 5b \cdots \cdots ② \\ 2l = 64a + 8b \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

$$\text{連立方程式} \begin{cases} l = 25a + 5b \cdots \cdots ② \\ ② - ③' \quad \begin{cases} l = 32a + 4b \cdots \cdots ③' \\ 7a = b \cdots \cdots ④ \end{cases} \end{cases}$$

④を②へ代入

$$l = 25a + 5(7a) \quad \therefore l = 60a$$

- (3) 新 UFO 誕生後, 3 周するまでの時間 t とする。

$$3l = at^2 + bt, \quad l = 60a, \quad b = 7a \text{ を代入}$$

$$180a = at^2 + 7at$$

$$\therefore t^2 + 7t - 180 = 0 \quad (\because a \neq 0)$$

$$\text{解の公式より } t = \frac{-7 + \sqrt{769}}{2} \quad (t > 0)$$

$$\text{第 3 周にかかる時間 } t - 8 = \frac{-23 + \sqrt{769}}{2} \quad (\text{時間})$$

- (4) 新 UFO 誕生後 x 周するまでにかかる時間を t 時間とする。

$$t^2 + 7t = 60x \cdots \cdots ①$$

$$t^2 + 7t - 60x = 0$$

$$\text{解の公式より } t = \frac{-7 + \sqrt{49 + 240x}}{2} \cdots \cdots ②$$

新 UFO 誕生後 $x - 1$ 周するまでにかかる時間を t' 時間とする。

$$t'^2 + 7t' = 60(x - 1),$$

$$\text{解の公式より } t' = \frac{-7 + \sqrt{49 + 240(x - 1)}}{2} \cdots \cdots ③$$

②, ③より

$$t - t' = \frac{-7 + \sqrt{49 + 240x}}{2} - \frac{-7 + \sqrt{49 + 240(x - 1)}}{2} \leq 1$$

無理不等式を解く。

$$-7 + \sqrt{49 + 240x} + 7 - \sqrt{49 + 240(x - 1)} \leq 2$$

$$\sqrt{49 + 240x} - \sqrt{49 + 240(x - 1)} \leq 2$$

$$\sqrt{49 + 240x} \leq 2 + \sqrt{49 + 240(x - 1)}$$

$$49 + 240x \leq$$

$$4 + 4\sqrt{49 + 240(x - 1)} + 49 + 240(x - 1)$$

$$59 \leq \sqrt{49 + 240(x - 1)}$$

$$3481 \leq 49 + 240(x - 1)$$

$$\frac{3672}{240} \leq x$$

$$15.3 \leq x$$

$\therefore$ 16 周目に再分裂する。

2

$\triangle ABC$ があって、辺 BC , CA , AB の中点を、それぞれ D , E , F とする。

問1 E を通って線分 AC に垂直で長さがその2分の1の線分 EH

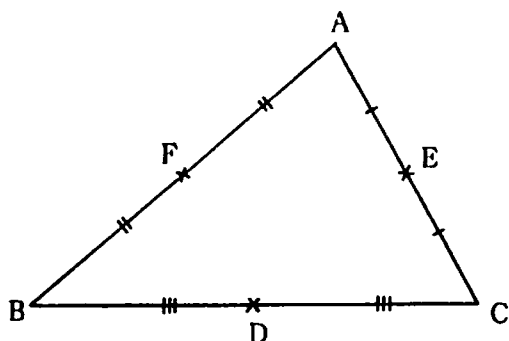
F を通って線分 AB に垂直で長さがその2分の1の線分 FG

この2つの線分を三角形の外側に書け。

(以下追加の図は free hand でよいが、ていねいに書くこと)

問2 $EH=FD$, $FG=ED$ を証明せよ。

問3 $DH \perp DG$, $DH=DG$ を証明せよ。



着眼点

問1 或文章に示されてある通りの図をかくことに慣れていないようなのでコンテストでは図を書くことにも点を与えることにしている。そしていつも free hand をすすめている。之には根拠があるがここでは省略する。

あまり粗末ではなく角は直角らしく、線分の長さもそれらしく見ればよい。

問2 三角形の2辺の中点を結ぶ線分は第3辺に平行で長さがその半分であることを知っておればよい。これはごく基本的なことで知らないのではどうにもならない。

問1, 問2 は解答者に点を多く与えたい為のものなのである。

問3 この解答方法は色々あるだろう。出題者としては解答例のようなものを期待しているのではあるが一方別な解法が現れることも興味をもっている。何れにしても正しい解答には点を十分に与える。以下解答例についての着眼点を示す。

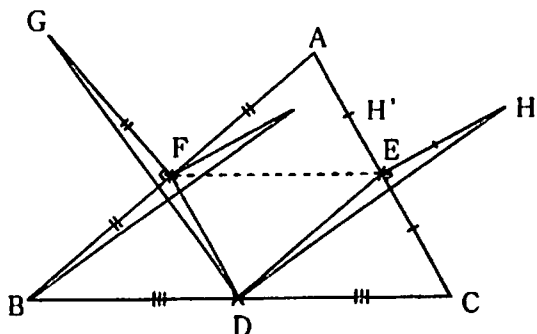
$\triangle HED$ と $\triangle GDF$ についての関係であることは解るだろうが、このままでは関係を見出すに困難である。中学で図形移動というものを

習った筈である。平行移動、回転移動、対称移動が、その主なものであるが要するに図形を動かして関係を発見するものである。その要領の一つに「等長のものは重ね合わせる、という事がある。

問2 で $EH=FD$, $GF=DE$ を知ったが直ぐには重ならない。そこで $GF=FB$ から $ED \cong FB$ をみつけ之を重ねること試みる。 $\triangle HED$ を平行移動する。幸い $EF \cong BC$ である。 E が F に、 D が B に重なる移動でできた三角形で $GF \perp BF$, $GF=BF$ から 90° 回転して重ね、もとの三角形との関係を見つけるのである。

中学では証明の手段として図形移動を習っている。この操作に慣れている者には、これらの発見はそんなに難しいことではない。図形移動というものは図形関係の数学には極めて重要なものであるばかりでなく、高校でも極めて有効に役立つことを強調しておく。

解答例



問1 上図の通りである。(H' が入らない前まで)

問2 $FD = \frac{1}{2} AC = EH$, $GF = \frac{1}{2} AB = DE$

問3 $\triangle HED$ を EF にそって E が F に重なるまで平行移動すれば

$FE \parallel BC$, $FE = \frac{1}{2} BC = BD$ から

D は B に重なる。 H の移った点を H' とする。

$FH' \cong EH = FD$ であるから $\triangle H'FB$ を F 中心 90° 回転して H' を D に重ねれば $GF = DE = BF$, $GF \perp BF$ から B は G に重なる。

90° 回転して $\triangle H'FB$ が $\triangle DFG$ に重なったのであるから

$DG \perp BH'$, $BH' \cong DH$, i. e. $DG \perp DH$ また $DG = BH' = DH$

注: 解答例の図を H' をつけない前のものと、その後の2>示してもよい。

3

互いに素である2つの自然数 a, b ($a > b$) に対して、 $a^2 - b^2$ が平方数 (自然数の平方) であるとき、 $a+b$ と $a-b$ はともに平方数であるか、またともに平方数の2倍であることを示す。次の手順にそって考えよう。

- (1) $a+b, a-b$ はともに偶数か、ともに奇数であることを示せ。
- (2) $m^2 = a^2 - b^2$ とする。 m が奇数の素数 p を約数とするとき、 $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方が p^2 を約数として持つことを示せ。
- (3) (1), (2)を利用して $a+b, a-b$ はともに平方数であるか、またはともに平方数の2倍であることを示せ。

着眼点

背理法の考え方が使えるか。(2)で $m^2 = (a+b)(a-b)$ は p^2 を約数とするが、 $a+b$ も $a-b$ もともに p の約数であるとすれば矛盾が生じることを示せばよい。また(3)では $a+b, a-b$ がともに奇数の場合と、ともに偶数の場合の両方を調べなければならない。

解答例

- (1) $(a+b) + (a-b) = 2a$ (a, b 自然数) よりこの2数の和は偶数。よって $a+b, a-b$ はともに偶数であるか、ともに奇数であるかのいずれかである。
- (2) m の約数で奇素数であるものを p とすると、 m^2 は p^2 で割りきれ。 $m^2 = (a+b)(a-b)$ で $(a+b)(a-b)$ は p^2 で割りきれるので $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方が p^2 の倍数であるか、 $a+b, a-b$ がそれぞれ p の倍数であるかのいずれかである。

ここで $a+b, a-b$ がそれぞれ p の倍数であると仮定すると、

$$\begin{cases} a+b=pk \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a-b=pl \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad (k, l \text{ は整数}) \text{ とおけるが、}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } 2a = p(k+l) \\ \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } 2b = p(k-l) \end{cases} \quad \text{ここで } p \text{ は奇素数より}$$

$2a$ も $2b$ も p の倍数となる。 p は奇数より a, b はともに p の約数となり a, b 互いに素に反する。よって矛盾が生じるので $a+b, a-b$ がそれぞれ p の倍数であるとした仮定が誤り。(背理法) よって

$a+b$ または $a-b$ のどちらか一方が p^2 の倍数である。よって $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方が P_2 を約数としてもつ。

- (3) $a+b$ と $a-b$ がともに奇数のとき $m^2 = (a+b)(a-b)$ も奇数である。よって m も奇数より、 m は奇素数 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ の積 $m = p_1, p_2, \cdots, p_r$ と表せる。

よって $m^2 = (a+b)(a-b) = p_1^2, p_2^2, \cdots, p_r^2$ と表せるが、 m の約数それぞれについて p_i^2 ($1 \leq i \leq r$) は $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方に約数として含まれる。(2)より)

よって $a+b, a-b$ はいずれも平方数の積になるのでともに平方数で表せる。

また $a+b, a-b$ が共に偶数のとき $m^2 = (a+b)(a-b)$ とも偶数であるので、 m も偶数である。

よって $m = 2^s p_1 p_2 p_3 \cdots p_r$ ($p_1 \sim p_r$ は奇素数) と表せる。ここで $m^2 = (a+b)(a-b) = 2^{2s} p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2$ となる。

ここで(2)より奇素数の平方 $p_1^2, p_2^2, \cdots, p_r^2$ については $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方に約数として含まれる。また $a+b, a-b$ はともに偶数より $a+b = 2M, a-b = 2N$ (M, N 整数) とおける。ここで M, N ともに偶数とすると $a = M+N, b = M-N$ より互いに素に反する。よって M, N のいずれかが奇数より、 $m^2 = 2^2 (2^{2s-2}) p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2$ は2の累乗 2^{2s-2} については M または N のどちらか一方に含まれる。よって m^2 の約数のうち $(2^{2s-2}) p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2$ は M または N のどちらか一方に含まれるから

$$\begin{cases} a+b = 2M \\ a-b = 2N \end{cases}$$

(M, N は平方数) となりともに平方数の2倍となる。

よって $a+b, a-b$ はともに平方数であるか、ともに平方数の2倍であるかのいずれかである。

4

$C(x), S(x)$ はすべての実数で定義された異なる実数値関数で、任意の実数 a, b に対して

$$C(a+b) = C(a)C(b) - S(a)S(b) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S(a+b) = S(a)C(b) + C(a)S(b) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たしている。

$$F(x) = \{C(x)\}^2 + \{S(x)\}^2$$

とすると、次の各問に答えよ。

- (1) ①を利用して、 $C(0) \neq \frac{1}{2}$ を示せ。

- (2) ②を利用して、 $S(0)$ の値を求めよ。
 (3) $C(0)$ の値を求めよ。
 (4) $F(a+b)=F(a) \cdot F(b)$ が成り立つことを示せ。
 (5) $F(1)>F(0)$ のとき、任意の実数 x に対し

$F(x+1)>F(x)$
 が成り立つことを示せ。

着眼点

(3)において、 $C(0)$ の値が0か1になることがわかるが、どちらの値をとるか、きちんと調べてほしいところである。問題文の条件「 $C(x)$ と $S(x)$ は異なる関数」から、 $C(0) \neq 0$ と予想できると思う。問題の条件をすべて使い切ることが大切である。

$C(x)$ 、 $S(x)$ のモデルとしては、 $C(x)=2^x \cos x$ 、 $S(x)=2^x \sin x$ などがあげられる。このとき、 $F(x)=4^x$ となり、(5)の問題も自然に感じられると思う。(5)では、 $F(x)>0$ がわかれば、むずかしくはない。

解答例

- (1) $C(0)=\frac{1}{2}$ と仮定する。①において、 $a=b=0$ とすると

$$C(0)=[C(0)]^2-[S(0)]^2 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ゆえに、 $[S(0)]^2=-\frac{1}{4}$ 、この式をみたす実数 $S(0)$ は存在しないので、これは題意に矛盾する。

ゆえに、 $C(0) \neq \frac{1}{2}$ (証明おわり)

- (2) ②において、 $a=b=0$ とすると

$$S(0)=2S(0)C(0)$$

ゆえに、 $S(0)(2C(0)-1)=0$

(1)より、 $C(0) \neq \frac{1}{2}$ なので、 $S(0)=0$

(答) $S(0)=0$

- (3) ③と(2)の結果から、 $C(0)(C(0)-1)=0$

ゆえに、 $C(0)=0, 1$

以下、 $C(0) \neq 0$ を示す。

$C(0)=0$ とする。②において、 $b=0$ とすると、

$$S(a)=S(a)C(0)+C(a)S(0)=0$$

①において、 $b=0$ とすると

$$C(a)=C(a)C(0)-S(a)S(0)=0$$

ゆえに、 $S(a)=C(a)=0$ 、 a は任意であるから、これは、 $C(x)$ と $S(x)$ が異なる関数であることに矛盾する。よって、 $C(0) \neq 0$

ゆえに、 $C(0)=1$ (答) $C(0)=1$

- (4) $F(a+b)=[C(a+b)]^2+[S(a+b)]^2$

$$\begin{aligned} &= [C(a)C(b)-S(a)S(b)]^2 \\ &\quad + [S(a)C(b)+C(a)S(b)]^2 \\ &= ([C(a)]^2+[S(a)]^2)([C(b)]^2 \\ &\quad + [S(b)]^2) \\ &= F(a) \cdot F(b) \quad (\text{証明おわり}) \end{aligned}$$

- (5) (4)より、任意の実数 x に対し、

$$\begin{aligned} F(x)F(-x) &= F(x+(-x))=F(0) \\ &= [C(0)]^2+[S(0)]^2=1^2+0^2=1 \end{aligned}$$

なので、 $F(x) \neq 0$ 、したがって、 F の定義により $F(x)>0$ が常に成り立つ。

$$F(1)>F(0)(=1)$$

の両辺に、 $F(x)(>0)$ を掛けて、

$$F(x)F(1)>F(x)$$

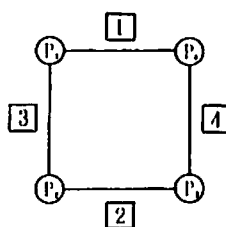
したがって、(4)により

$$F(x+1)>F(x) \quad (\text{証明おわり})$$

5

n 人の各人が、他人の知らない独自のゴシップ情報を持っている。電話によって、 n 人が互いに情報を交換しあうとき、 A と B の2人の間で交わされる1回の通話で、 A 、 B それぞれがその時点で持っている情報すべてを互いに相手に伝えあうものとする。このとき、 n 人全員が n 種類の情報すべてを入手するために必要な最小通話回数を a_n とする。ただし、 $n \geq 4$ である。次の問に答えよ。

例1 4人のとき

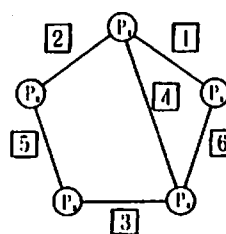


- ① $\textcircled{P1}$ と $\textcircled{P2}$ が通話する
 - ② $\textcircled{P2}$ と $\textcircled{P4}$ が通話する
 - ③ $\textcircled{P4}$ と $\textcircled{P3}$ が通話する
 - ④ $\textcircled{P3}$ と $\textcircled{P1}$ が通話する
- これで4人とも全ての情報を得ることができたので、 $a_4=4$

※注意

$\textcircled{P1}$ が人間、 $\textcircled{P2}$ と $\textcircled{P3}$ をつなぐ線分が、その2人が通話したことを表し、□の数字が全体で何番目に行われた通話であるかを表している。

例2 5人のとき



- ① $\textcircled{P1}$ と $\textcircled{P2}$ が通話する
 - ② $\textcircled{P2}$ と $\textcircled{P3}$ が通話する
 - ③ $\textcircled{P3}$ と $\textcircled{P4}$ が通話する
 - ④ $\textcircled{P4}$ と $\textcircled{P5}$ が通話する
 - ⑤ $\textcircled{P5}$ と $\textcircled{P1}$ が通話する
- これで5人とも全ての情報

報を得ることができたの
で、 $a_3=6$

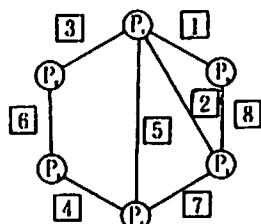
- (1) $a_6=8$ となることを解答用紙の図に示せ。
- (2) a_7 を求めよ。
- (3) $a_n \leq a_{n-1} + 2$ となることを説明せよ。
- (4) $a_n \leq 2n-4$ となることを示せ。

着眼点

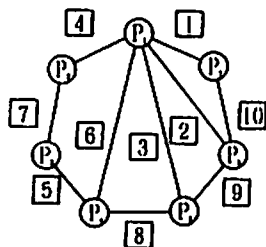
- ・ n 人のとき、最初に⑥と⑧が通話し、⑧を除いた⑥、……、⑧で通話して、最後に $n-1$ 人の中の誰かと P_n が通話する。
- ・ $a_4=4$, $a_5=6$, $a_6=8$ から $a_7=10$ に気がついたのでは。
- ・ (3)の証明では、 a_n が最小通話回数であることから不等式となる。
- ・ (4)は漸化式の基本的な解法である。
- ・ 実は、 $a_n=2n-4$ である。しかし、 $a_n \leq 2n-4$ の証明が難しいため問題にはしなかった。
- ・ この問題は、「離散数学」という分野の「ゴシップ問題」という問題である。

解答例

- (1) $a_6=8$



- (2) $a_7=10$



- (3) n 人の人を $P_1, P_2, \dots, P_n$ とする。

いま、 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ の $n-1$ 人が、最小通話回数 a_{n-1} 回ですむ順序 M で通話したとする。このとき、 P_n を含めた n 人での通話を次のように行う。

「まず最初に、 P_1 と P_n の 2 人が通話する。

次に、 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ の $n-1$ 人が (P_n の情報をも交えて) 順序 M で a_{n-1} 回通話する (こ

のとき、 P_n 以外の $n-1$ は皆 n 種類の情報をすべて得ている)。

最後に、 P_n と $n-1$ 人のうちの任意の 1 人が通話をする (これで、 n 人全員が n 種類の情報を得たことになる)。

このとき、通話回数は $1 + a_{n-1} + 1 = a_{n-1} + 2$ 回行われている。

よって、 a_n は n 人の最小通話回数なので、 $a_n \leq a_{n-1} + 2$

- (4) $a_n \leq a_{n-1} + 2$ より

$$a_n - a_{n-1} \leq 2$$

これより、 $a_5 - a_4 \leq 2$

$$a_6 - a_5 \leq 2$$

$$a_7 - a_6 \leq 2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$+ \quad a_n - a_{n-1} \leq 2$$

$$a_n - a_4 \leq 2(n-4)$$

$$a_4 = 4 \text{ であるから,}$$

$$a_n - 4 \leq 2n - 8$$

$$\text{よって, } a_n \leq 2n - 4$$

第 13 回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

平成 7 年 1 月 12 日 (木) 実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第13回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長 今 西 義 紀

昭和58年度（1983年）1月15日に第1回が実施された「数学コンテスト」も今回で第13回を迎えることができました。今年は全道19校から中学生を含む202名の高校生諸君の参加を得て盛大に開催できたことは関係者一同喜びにたえません。このコンテストに対する理解と数学に対する興味・関心や数学の重要性が認識されてきたことの表れとうれしく思うとともに、全道各地で熱心に指導に当たっておられる先生方のご努力に深く感謝と敬意を表します。

この「数学コンテスト」は、アメリカや東欧諸国で行なわれていた“数学オリンピック”にヒントを得て、北海道においてもそれに似た催しを行ない、数学好きの高校生や中学生に刺激を与え、一層数学的な興味を高め、また数学に楽しく挑戦することを通して、潜在している数学的能力を引き出す手立てとして実施してきました。1989年から世界の50ヶ国目として、日本も国際数学オリンピックに参加し、予選の日本数学オリンピックにおいて、本道の高校生が毎回優秀な成績を収めてきた、特に中国の北京で行われた第31回大会で札幌の高校生が銅メダルを受賞したことは大変嬉しいことでした。数学コンテストや数学オリンピックは、単に数学の問題を解く力を競い、それに優劣をつけるものではありません。この数学コンテストをとおして、数学教育本来の目標である基本的な概念や原理・法則、論理的思考力や創造的な考え方を自らがそれぞれの持っている能力に応じて問題を解決しながら身につけ、数学にたいする興味・関心を高めることにあります。21世紀に向けての高度情報化と国際化に数学の果たす役割はますます重要であり、ひいては、Andrew Wiles先生のように何百年来の難問を解決できる資質を育てて欲しいと考えています。さらにこの数学コンテストをきっかけとして数学を愛する同好の士が増え、それぞれの学校で互いに励まし合いながら一層本道の数学の学力の水準を高めることに役立ちたいとも念願しています。

終わりにになりましたが、北海道教育委員会、札幌市教育委員会、北海道高等学校校長協会より賜りました後援並びに北海道新聞社、福武書店の物心両面にわたるご高配に厚くお礼申し上げますとともに、本年も問題作成について御尽力頂きました北海道大学理学部数学科、出題や採点からコンテストの運営全般にわたってご苦労いただいた北数教高校部会研究部、さらに全道各地で実施にご協力いただいた会場校や諸先生に厚くお礼申し上げます。今度ともご協力の程よろしく願いいたします。

●成績優秀者

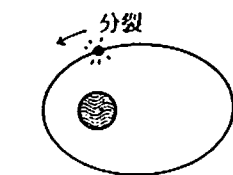
佐々木 耕 太	松 島	毅	吉 田 修 也	岡 田 隆 介
小谷 公 馨	本 多 集	悟	渡 辺 望	中 田 真 真
村 上 岳 一	笠 島 久	司	鈴 木 崇	森 川 道 祐
田 村 昌 史	丸 山 玲	緒	田 中 庸	中 早 瀬
軍 司 秀	中 村 裕	裕	藤 好 真 人	

第13回 数学コンテスト度数分布

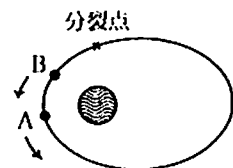
得 点	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	階 級	合 計
40	6	42	4	1	4	200 ~ 200	0
39	0	0	0	0	0	195 ~ 199	0
38	0	0	2	0	3	190 ~ 194	0
37	3	1	0	0	0	185 ~ 189	1
36	0	0	0	0	0	180 ~ 184	1
35	1	38	1	1	1	175 ~ 179	2
34	1	3	2	0	1	170 ~ 174	0
33	0	0	1	2	1	165 ~ 169	0
32	6	0	0	0	2	160 ~ 164	0
31	0	1	0	2	1	155 ~ 159	1
30	25	0	2	8	3	150 ~ 154	1
29	0	18	0	0	0	145 ~ 149	3
28	0	0	1	3	0	140 ~ 144	1
27	11	0	0	3	2	135 ~ 139	3
26	0	0	0	0	5	130 ~ 134	3
25	5	52	4	4	0	125 ~ 129	3
24	0	0	0	0	0	120 ~ 124	1
23	0	0	3	0	3	115 ~ 119	7
22	1	0	0	1	1	110 ~ 114	5
21	0	0	0	0	0	105 ~ 109	3
20	15	1	3	0	7	100 ~ 104	5
19	0	0	0	3	2	95 ~ 99	5
18	0	0	2	0	28	90 ~ 94	5
17	2	0	3	0	0	85 ~ 89	7
16	0	0	2	1	3	80 ~ 84	12
15	3	0	4	0	2	75 ~ 79	7
14	0	1	0	3	0	70 ~ 74	11
13	0	0	19	1	14	65 ~ 69	10
12	0	0	1	0	0	60 ~ 64	8
11	0	0	0	2	28	55 ~ 59	5
10	26	4	37	1	4	50 ~ 54	13
9	0	0	1	0	1	45 ~ 49	6
8	0	0	3	9	17	40 ~ 44	11
7	0	0	5	0	3	35 ~ 39	9
6	0	0	3	1	0	30 ~ 34	7
5	6	0	5	2	8	25 ~ 29	3
4	0	0	0	0	0	20 ~ 24	2
3	0	0	15	3	2	15 ~ 19	0
2	0	0	0	0	8	10 ~ 14	0
1	0	0	0	0	0	5 ~ 9	1
0	53	3	41	113	10	0 ~ 4	2
受験者数	164	164	164	164	164	164	
総 計	2,475	5,076	1,653	987	2,354	12,545	
平 均 点	15.09	30.95	10.08	6.018	14.35	76.49	
S・D	13.30	8.217	9.875	10.72	9.423	36.90	

1

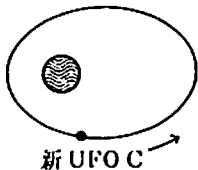
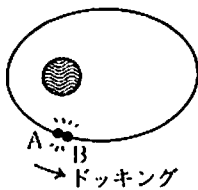
木星を周回する UFO について次の小問に答えよ。



- (1) 木星を周回する UFO が今同じ向きに周回する 2 つの UFO A, B に分裂した。A の速さは, v (km/時), B の速さは, v^2 (km/時) で ($0 < v < 1$) とする。UFO A, B が分裂後, 又ドッキングするまでの時間を最小にする v の値を求めよ。

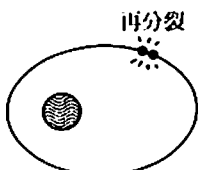


ドッキング後, 新 UFO C が誕生した。誕生後, t 時間に進む距離は, $at^2 + bt$ と表される。はじめの 5 時間で第 1 周し, 3 時間後に第 2 周した。



- (2) 周回軌道の 1 周の長さを a で表せ。

- (3) 新 UFO C の第 3 周にかかる時間を求めよ。



- (4) 1 周にかかる時間が 1 時間以内になると, 再分裂するという第何周目の時に再分裂するか。

講評

(1), (2), (3) までは比較的よく解答しており, よくできていた様です。(4) がかなり苦労した様で, いろいろな解答が見られました。

4 人の生徒が模範解答にはない, 独自の発想で見事に正解していたのには感動しました。[解答例] は, 時間に関する無理不等式を組み立てて解法しましたが, 1 周にかかる時間が 1 時間以内

$$at^2 + bt - \underbrace{\{a(t-1)^2 + b(t-1)\}}_{1 \text{ 周}} \geq 60a$$

展開しまとめると

$$2ta - a + b \geq 60a, \quad b = 7a \text{ より}$$

$$\therefore t \geq 27$$

$$27 \text{ 時間後は } 729a + 27b$$

$$= 918a$$

$$\frac{918a}{60a} = 15.3$$

$\therefore 16$ 周には分裂する。

よくできた解答でした。

解答例

- (1) 周囲を l , 分裂後再ドッキングするまでの時間を t とする。

$$l = t \times (v - v^2)$$

$$\therefore tv^2 - tv + l = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

v が実数であるためには

$$\text{判別式 } t^2 - 4tl \geq 0 \quad t(t - 4l) \geq 0$$

$$\therefore t \leq 0, \quad t \geq 4l \quad t \leq 0 \text{ は不適}$$

$$\therefore t \geq 4l$$

t の最小値は $4l$ $t = 4l$ を①へ代入

$$4lv^2 - 4lv + l = 0 \quad l \neq 0 \text{ より } (2v - 1)^2 = 0$$

$$\therefore v = \frac{1}{2}$$

$$(2) \begin{cases} l = 25a + 5b \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 2l = 64a + 8b \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\text{連立方程式} \begin{cases} l = 25a + 5b \cdots \cdots \textcircled{2} \\ l = 32a + 4b \cdots \cdots \textcircled{3}' \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3}' \quad \begin{cases} l = 25a + 5b \cdots \cdots \textcircled{2} \\ l = 32a + 4b \cdots \cdots \textcircled{3}' \end{cases}$$

$$7a = b \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④を②へ代入

$$l = 25a + 5(7a) \quad \therefore l = 60a$$

- (3) 新 UFO 誕生後, 3 周するまでの時間 t とする。

$$3l = at^2 + bt, \quad l = 60a, \quad b = 7a \text{ を代入}$$

$$180a = at^2 + 7at$$

$$\therefore t^2 + 7t - 180 = 0 \quad (\because a \neq 0)$$

$$\text{解の公式より } t = \frac{-7 + \sqrt{769}}{2} \quad (t > 0)$$

$$\text{第 3 周にかかる時間 } t - 8 = \frac{-23 + \sqrt{769}}{2} \text{ (時間)}$$

- (4) 新 UFO 誕生後 x 周するまでにかかる時間を t 時間とする。

$$t^2 + 7t = 60x \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$t^2 + 7t - 60x = 0$$

$$\text{解の公式より } t = \frac{-7 + \sqrt{49 + 240x}}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

新 UFO 誕生後 $x - 1$ 周するまでにかかる時間を t' 時間とする。

$$t'^2 + 7t' = 60(x - 1),$$

$$\text{解の公式より } t' = \frac{-7 + \sqrt{49 + 240(x - 1)}}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$t - t' = \frac{-7 + \sqrt{49 + 240x}}{2} - \frac{-7 + \sqrt{49 + 240(x - 1)}}{2} \leq 1$$

無理不等式を解く。

$$\begin{aligned}
& -7 + \sqrt{49+240x} + 7 - \sqrt{49+240(x-1)} \leq 2 \\
& \sqrt{49+240x} - \sqrt{49+240(x-1)} \leq 2 \\
& \sqrt{49+240x} \leq 2 + \sqrt{49+240(x-1)} \\
& 49+240x \leq \\
& \quad 4 + 4\sqrt{49+240(x-1)} + 49+240(x-1) \\
& 59 \leq \sqrt{49+240(x-1)} \\
& 3481 \leq 49+240(x-1) \\
& \frac{3672}{240} \leq x \\
& 15.3 \leq x \\
& \therefore 16\text{周目に再分裂する。}
\end{aligned}$$

2

△ABCがあって、辺BC, CA, ABの中点を、それぞれD, E, Fとする。

問1 Eを通過して線分ACに垂直で長さがその2分の1の線分EH

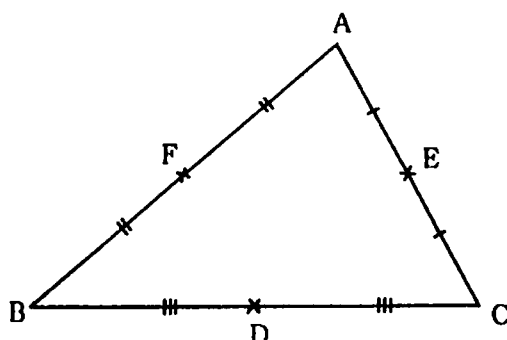
Fを通過して線分ABに垂直で長さがその2分の1の線分FG

この2つの線分を三角形の外側に書け。

(以下追加の図は free hand でよいが、ていねいに書くこと)

問2 EH=FD, FG=EDを証明せよ。

問3 DH⊥DG, DH=DGを証明せよ。



講評

最初に、「問題用紙の図」について、お詫びしたい。∠Aの大きさを30°～40°位にしなかったために、△FGD, △EDHの作図を困難にしたことである。校正の重要性を痛感した。

「解答と解説」から分かるように、出題者の意図は、問3にある。問3の形のまま出題すると解くことが困難と判断して、段階的に出題した。

問1 図形問題では「まず図を書く」ことが大切である。その趣旨から出題した。ほとんどの人が

できていた。(図を書くことは「説明を明確にする」ので、採点者の理解を得やすい)

全然手を付けなかった人は「図を書く」ことを難しいと考えているのではないか。

問2 「中点連結の定理」は幾何における基本定理なので、それを利用した証明を期待していたが、「相似」を使った証明がかなり多かったのは意外である。

なお、ベクトルを使って証明した人が1名いた。

問3 「DH=DGをまず証明する」のに、DH, DGを辺にもつ2つの3角形, △FDG, △EDHが合同であることを証明すればよい。

問2の結果から、DG=DH, FG=DEが与えられているので、2辺にはさまれた角について、∠GFD=∠HEDが成り立つことから「2辺とそのはさむ角が等しい」という合同条件を導けばよい。

ところが、△BFD≡△DEF, △ABC≡△BDFを用いた証明があった。本質に関係のない部分を含む証明は「減点の対象になる」ことを理解してほしい。(森 毅著「数学受験術指南」参照)

DH⊥DGの証明では「DH⊥DG⇔∠GDH=∠R」を「内角の和=180°」の形の証明が圧倒的に多く、出題者の意図した「平行移動・回転」を利用した証明が2例しかなく、しかも不完全なものであったことは残念である。

次に、函館ラサール高校の佐伯知哉君の証明を示す。

△GFD≡△HEDより、

$$\angle GDF = \angle DHE, \angle FGD = \angle HDG \cdots \textcircled{1}$$

AE=DE, AF=BEより、4角形AEDFは平行四辺形だから、

$$\angle BFD = \angle FDE \cdots \textcircled{2}$$

$$\triangle DHE \text{ において、} \angle CEH = 90^\circ \text{ より、} \angle EDH + \angle CED + \angle DHE = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$\begin{aligned}
\angle GDH &= \angle EDH + \angle FDE + \angle GDF \\
&= \angle EDH + \angle CED + \angle DHE = 90^\circ
\end{aligned}$$

$$\therefore DH \perp DG$$

この証明は「解説と解答」の証明に比べると、やや重い感じがする。諸君は「解答と解説」を読んで、幾何の面白さを再確認してほしい。

注：解答例の図をH'をつけない前のものと、その後の図で示してもよい。

(3) (1), (2)を利用して $a+b$, $a-b$ はともに平方数であるか、またはともに平方数の2倍であることを示せ。

$a+b$ はともに偶数かともに奇数である。

背理法を使わなくてもよいが、使った答案もあった。

$a+b$, $a-b$ がそれぞれ偶数, 奇数とすると

$$\begin{cases} a+b=2k & \text{①} \\ a-b=2l+1 & \text{②とおけて} \end{cases}$$

$$\text{①}+\text{②より } 2a=2k+2l+1$$

左項偶数, 右項奇数より矛盾。

また $a+b$ 奇, $a-b$ 偶のときも同様

$a^2-b^2=m^2$ を使わなくてもよいが、使った答案もあった。 m 奇数のとき $(a+b)$, $(a-b)$ とともに奇数であり, m 偶数のとき $(a+b)$ $(a-b)$ は 4 の倍数, ここで積が偶数なのは (偶) $\times$ (偶) または (偶) $\times$ (奇) であるが $(a+b)-(a-b)=2b$ 偶より (偶) $\times$ (奇) はありえない。よってともに偶数。2 つをあわせて $(a+b)$, $(a-b)$ はともに偶かともに奇である。多かったまちがいは a 奇数, b 偶数のとき,

$$\begin{cases} a=2n+1 \\ b=2n \end{cases} \text{ としてしまったもの。こうすると}$$

$$a+b=4n+1, a-b=1 \text{ より}$$

$(a+b)(a-b)=4n+1$ となって以下ワケがわからなくなってしまったもの。 a : 奇数, b : 偶数ならば

$$\begin{cases} a=2\text{㊸}+1 \\ b=2\text{㊹} \end{cases} \text{ 文字をかえなければならない。}$$

③のなかでは①の出来は比較的よかった。

② これは背理法を使わなければ示すことができないものである。背理法は「 A であることを示すのに, A でないことを仮定する」という部分がわかりづらいという人が多い。しかしこの流れは発想としては自然かつ無理のないものである。というのは何人かで議論をするときに, 自分の立場でどれだけ話しても自分が正しいことを示すことはできない。「正しいから正しい」「まちがいだからまちがいである」では議論にならないのである。「 A であることを示すために」「 A がなりたたないと仮定すると」「矛盾が生じる」「よって A がなりたたないとした仮定があやまりである」「よって A がなりたつ」これが背理法の考え方であり, 正しそうだがどうやって正しいかどうかを示せるかわからないとき, 非常に有効な方法である。

さて, この問題で背理法を使わないで示そうとした答案もあったが, どの人もみな悪戦苦闘していた。

例えば $m^2=(a+b)(a-b)$ において m が奇素数 p を約数とすると $m=pk$ とできることから

$$p^2k^2=(a+b)(a-b) \text{ となり}$$

$$a+b > a-b \text{ より}$$

$$\begin{cases} a+b=p^2k \\ a-b=k \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=p^2k^2 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=pk \\ a-b=pk \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=pk^2 \\ a-b=p \end{cases}$$

などとして一つ一つ場合分けしていた人もいたが, このような場合分けは可能だろうか? 実は k 自体がさらに積に分解可能なことがありこのような場合分けでは調べつくすことはできないのである。そのようなわけで背理法を使わない解答には部分点は上げられても正解とはいえない。

出来はあまりよくなく受験者の中で 1 割以下の正解者しかなかった。

(3) ②がちゃんとできていなくても②を用いて説明していた答案はあったが, それはそれなりに評価させてもらった。しかし $a+b$, $a-b$ が奇数の場合については②の利用でよくても, $a+b$, $a-b$ が偶数の場合について, しっかりした説明がかかれていた人はとても少なかった。ポイントは奇素数 p の 2 乗 p^2 については, $a+b$, $a-b$ のどちらかの約数になっているので, 奇数についてはどちらかに属すること。

ともに偶数のとき $a+b=2M$, $a-b=2N$ とおける。ここで M , N がともに奇数なら前半より解決。また M , N が偶数または奇数ならば 2 の偶数乗が片方に入る。また M , N がともに偶数とすると a , b 互いに素に反する。ということで M , N についての吟味をちゃんとやっているかについてもみてみたかった。

完全な解答はわずか一人 (受験番号 98 の本多君) 完全ではないが満点をあげたのは 3 人。満点でないが大むね流れが正しいと判断できるのが 2 人。というわけで, この問題は難しさもあったが出来はあまりよくなかった。授業であまりやらない部分, 考え方を使っていると思うが, 数学の中にこのような論理を駆使する部分があるということをわかってもらいたい。

解答例

(1) $(a+b)+(a-b)=2a$ (a , b 自然数) よりこの 2 数の和は偶数。よって $a+b$, $a-b$ はともに偶数であるか, とともに奇数であるかのいずれかである。

(2) m の約数で奇素数であるものを p とすると, m^2 は p^2 で割りきれ。 $m^2=(a+b)(a-b)$ で $(a+b)(a-b)$ は p^2 で割りきれるので $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方が p^2 の倍数であるか, $a+b$, $a-b$ がそれぞれ p の倍数であるかの

いずれかである。

ここで $a+b$, $a-b$ がそれぞれ p の倍数であると仮定すると、

$$\begin{cases} a+b=pk \cdots \cdots ① \\ a-b=pl \cdots \cdots ② \end{cases} \quad (k, l \text{ は整数}) \text{ とおけるが、}$$

$$\begin{cases} ①+② \text{ より } 2a=p(k+l) \\ ①-② \text{ より } 2b=p(k-l) \end{cases} \quad \text{ここで } p \text{ は奇素数より}$$

$2a$ も $2b$ も p の倍数となる。 p は奇数より a , b はともに p の約数となり a, b 互いに素に反する。よって矛盾が生じるので $a+b$, $a-b$ がそれぞれ p の倍数であるとした仮定が誤り。(背理法) よって $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方が p^2 の倍数である。よって $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方が P_2 を約数としてもつ。

(3) $a+b$ と $a-b$ がともに奇数のとき $m^2=(a+b)(a-b)$ も奇数である。よって m も奇数より、 m は奇素数 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ の積 $m=p_1 p_2 \cdots p_r$ と表せる。

よって $m^2=(a+b)(a-b)=p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2$ と表せるが、 m の約数それぞれについて p_i^2 ($1 \leq i \leq r$) は $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方に約数として含まれる。(2)より)

よって $a+b$, $a-b$ はいずれも平方数の積になるのでともに平方数で表せる。

また $a+b, a-b$ が共に偶数のとき $m^2=(a+b)(a-b)$ とともに偶数であるので、 m も偶数である。

よって $m=2^s p_1 p_2 p_3 \cdots p_r$ ($p_1 \sim p_r$ は奇素数) と表せる。ここで $m^2=(a+b)(a-b)=2^{2s} p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2$ となる。

ここで(2)より奇素数の平方 $p_1^2, p_2^2, \cdots, p_r^2$ については $a+b$ または $a-b$ のどちらか一方に約数として含まれる。また $a+b, a-b$ はともに偶数より $a+b=2M, a-b=2N$ (M, N 整数) とおける。ここで M, N とともに偶数とすると $a=M+N, b=M-N$ より互いに素に反する。よって M, N のいずれかが奇数より、 $m^2=2^2 (2^{2s-2}) p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2$ は 2 の累乗 2^{2s-2} については M または N のどちらか一方に含まれる。よって m^2 の約数のうち $(2^{2s-2}) p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2$ は M または N のどちらか一方に含まれるから

$$\begin{cases} a+b=2M \\ a-b=2N \end{cases}$$

(M, N は平方数) となりともに平方数の 2 倍となる。

よって $a+b, a-b$ はともに平方数であるか、ともに平方数の 2 倍であるかのいずれかである。

4

$C(x), S(x)$ はすべての実数で定義された異なる実数値関数で、任意の実数 a, b に対して

$$C(a+b)=C(a)C(b)-S(a)S(b) \cdots \cdots ①$$

$$S(a+b)=S(a)C(b)+C(a)S(b) \cdots \cdots ②$$

を満たしている。

$$F(x)=\{C(x)\}^2+\{S(x)\}^2$$

とするとき、次の各問に答えよ。

(1) ①を利用して、 $C(0) \neq \frac{1}{2}$ を示せ。

(2) ②を利用して、 $S(0)$ の値を求めよ。

(3) $C(0)$ の値を求めよ。

(4) $F(a+b)=F(a)F(b)$ が成り立つことを示せ。

(5) $F(1)>F(0)$ のとき、任意の実数 x に対し

$$F(x+1)>F(x)$$

が成り立つことを示せ。

講評

配点：(1)～(5)各8点、計40点。

0点の生徒が多く、40点が1人しかいないという残念な結果となりました。

答案には、論理的でないものや、説明不足のものもありました。白紙の答案も多かったのですが、まず、手を動かしてみてください。書いていくうちに、わかるということもあります。

(1)では、平方完成や判別式などを利用しているものもいくつかあり、学校で学んだ事をうまく使っていました。(1)ができていない生徒は、(2)もほとんどできていました。

$C(x)$ は関数なので、 $C(0)$ の値はただ1つだけです。(3)ですぐに $C(0)=0, 1$ とでますが、どちらか一方の値になります。 $C(0) \neq 0$ をきちんと説明している答案はほとんどありませんでした。

(4)は、数学I(新課程では数学A)の「等式の証明」のところでよくでてくる。

$$(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

そのものです。

(5)では、「任意の x に対して、 $F(x) \neq 0$ 」となることを述べないで、いきなり

$$F(x+1)=F(x)F(1)>F(x)F(0)=F(x)$$

としている答案が多かった。

また、①、②が加法定理の形をしていることから、

$C(x)=\cos x$, $S(x)=\sin x$ としてしまっているものもありました。問題を解くときに、答えを予想したり、関数をイメージしたりすることは大切なのですが、勝手に決めつけてはいけません。定義に忠実にあってほしいと思います。*イメージ、が*妄想、にならないよう注意を払って問題を解くことを期待します。

解答例

- (1) $C(0)=\frac{1}{2}$ と仮定する。①において、 $a=b=0$ とすると

$$C(0)=\{C(0)\}^2-\{S(0)\}^2\cdots\cdots\cdots\textcircled{3}$$

ゆえに、 $\{S(0)\}^2=-\frac{1}{4}$ 、この式をみたす実数 $S(0)$ は存在しないので、これは題意に矛盾する。
ゆえに、 $C(0)\neq\frac{1}{2}$ (証明おわり)

- (2) ②において、 $a=b=0$ とすると

$$S(0)=2S(0)C(0)$$

ゆえに、 $S(0)(2C(0)-1)=0$

(1)より、 $C(0)\neq\frac{1}{2}$ なので、 $S(0)=0$

(答) $S(0)=0$

- (3) ③と②の結果から、 $C(0)(C(0)-1)=0$

ゆえに、 $C(0)=0, 1$

以下、 $C(0)\neq 0$ を示す。

$C(0)=0$ とする。②において、 $b=0$ とすると、

$$S(a)=S(a)C(0)+C(a)S(0)=0$$

①において、 $b=0$ とすると

$$C(a)=C(a)C(0)-S(a)S(0)=0$$

ゆえに、 $S(a)=C(a)=0$ 、 a は任意であるから、これは、 $C(x)$ と $S(x)$ が異なる関数であることに矛盾する。よって、 $C(0)\neq 0$

ゆえに、 $C(0)=1$ (答) $C(0)=1$

- (4) $F(a+b)=\{C(a+b)\}^2+\{S(a+b)\}^2$
 $=\{C(a)C(b)-S(a)S(b)\}^2$
 $+\{S(a)C(b)+C(a)S(b)\}^2$
 $=(\{C(a)\}^2+\{S(a)\}^2)(\{C(b)\}^2+\{S(b)\}^2)$
 $=F(a)F(b)$ (証明おわり)

- (5) (4)より、任意の実数 x に対し、

$$F(x)F(-x)=F(x+(-x))=F(0) \\ =\{C(0)\}^2+\{S(0)\}^2=1^2+0^2=1$$

なので、 $F(x)\neq 0$ 、したがって、 F の定義により $F(x)>0$ が常に成り立つ。

$$F(1)>F(0)(=1)$$

の両辺に、 $F(x)(>0)$ を掛けて、

$$F(x)F(1)>F(x)$$

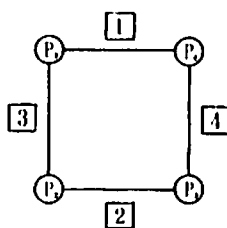
したがって、(4)により

$$F(x+1)>F(x) \quad (\text{証明おわり})$$

5

n 人の各人が、他人の知らない独自のゴシップ情報を持っている。電話によって、 n 人が互いに情報を交換しあうとき、 A と B の 2 人の間で交わされる 1 回の通話で、 A 、 B それぞれがその時点で持っている情報すべてを互いに相手に伝えあうものとする。このとき、 n 人全員が n 種類の情報すべてを入手するために必要な最小通話回数を a_n とする。ただし、 $n\geq 4$ である。次の問に答えよ。

例 1 4 人のとき

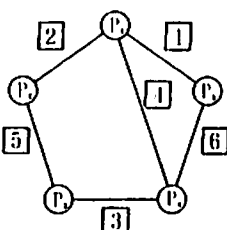


- ① $\textcircled{A}$ と $\textcircled{B}$ が通話する
 ② $\textcircled{B}$ と $\textcircled{C}$ が通話する
 ③ $\textcircled{C}$ と $\textcircled{D}$ が通話する
 ④ $\textcircled{D}$ と $\textcircled{A}$ が通話する
 これで 4 人とも全ての情報を得ることができたので、 $a_4=4$

※注意

$\textcircled{A}$ が人間、 $\textcircled{B}$ と $\textcircled{C}$ をつなぐ線分が、その 2 人が通話したことを表し、□の数字が全体で何番目に行われた通話であるかを表している。

例 2 5 人のとき



- ① $\textcircled{A}$ と $\textcircled{B}$ が通話する
 ② $\textcircled{B}$ と $\textcircled{C}$ が通話する
 ③ $\textcircled{C}$ と $\textcircled{D}$ が通話する
 ④ $\textcircled{D}$ と $\textcircled{E}$ が通話する
 ⑤ $\textcircled{E}$ と $\textcircled{A}$ が通話する
 これで 5 人とも全ての情報を得ることができたので、 $a_5=6$

- (1) $a_6=8$ となることを解答用紙の図に示せ。
 (2) a_7 を求めよ。
 (3) $a_n\leq a_{n-1}+2$ となることを説明せよ。
 (4) $a_n\leq 2n-4$ となることを示せ。

講評

配点は(1) 8 点 (2) 10 点 (3) 14 点 (4) 8 点

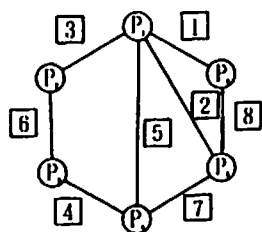
- ・白紙の答案が非常に少なく、ほとんどの生徒が手を出することができる問題であった。
- ・問題を作成したとき、問題の意味を理解してくれないのでは、という不安があったが、大部分の生徒は理解していたようである。
- ・(1)(2)で得点できなかった生徒は、単純な数え間違

いであった。

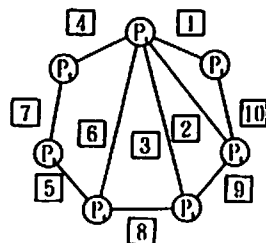
- ・(2)では、 $n = 4, 5, 6$ の結果より等差数列であるという推定のもとに a_7 を求めた受験生も多かった。推定はあくまでも推定であって、求めたことにはならないので注意すること。(3)の証明の考え方で a_7 を求めた生徒もいたが、その値が最小回数とはかぎらない。
- ・(3)の問に対して、予想以上にいろいろ考えくれた生徒がいて、出題者としてうれしかった。しかし、どういう方法で情報を伝えていくのか説明がない解答もあった。
- ・(4)は、(3)を変形するだけであつたが、思ったより変形できない生徒が多かった。
- ・全体的に、雑な答案、説明不足または、よく判らない説明の答案が少なくなかった。誰にでも分かる答案の書き方をしてほしい。

解答例

(1) $a_6 = 8$



(2) $a_7 = 10$



(3) n 人の人を $P_1, P_2, \dots, P_n$ とする。

いま、 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ の $n-1$ 人が、最小通話回数 a_{n-1} 回ですむ順序 M で通話したとする。このとき、 P_n を含めた n 人での通話を次のように行う。

「まず最初に、 P_1 と P_n の 2 人が通話する。

次に、 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ の $n-1$ 人が (P_n の情報をも交えて) 順序 M で a_{n-1} 回通話する (このとき、 P_n 以外の $n-1$ は皆 n 種類の情報をすべて得ている)。

最後に、 P_n と $n-1$ 人のうちの任意の 1 人が通話をする (これで、 n 人全員が n 種類の情報を得たことになる) 」

このとき、通話回数は $1 + a_{n-1} + 1 = a_{n-1} + 2$ 回行われている。

よって、 a_n は n 人の最小通話回数なので、 $a_n \leq a_{n-1} + 2$

(4) $a_n \leq a_{n-1} + 2$ より

$$a_n - a_{n-1} \leq 2$$

これより、 $a_5 - a_4 \leq 2$

$$a_6 - a_5 \leq 2$$

$$a_7 - a_6 \leq 2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\begin{array}{r} + a_n - a_{n-1} \leq 2 \\ \hline a_n - a_4 \leq 2(n-4) \\ a_4 = 4 \text{ であるから,} \\ a_n - 4 \leq 2n - 8 \\ \text{よって, } a_n \leq 2n - 4 \end{array}$$

担 当 委 員

坂	下	正	雄	中	西	勝	範
佐々	木	光	憲	古	川	政	春
鈴	木	雅	博	松	本	睦	郎
棚	橋		純	皆	川	一	雄
中	居	基	昭	湊	川	三	竿
中	田	保	之	大	和	達	也
永	淵	敬	二	和	田	文	興