第 1 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　　題

昭和58年1月15日（土）

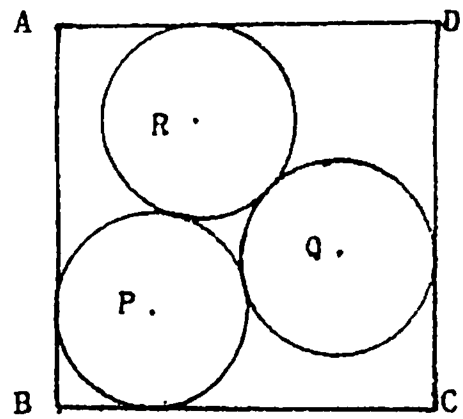
第一部　　　　90分

第二部　　　　150分

北海道高等学校数学教育会高等学校部会

第1回　北海道高等学校数学コンテスト　第1部　問　題　(1983年)

1　半径の等しい三つの円P，Q，R が互いに外接し、しかも正方形ＡＢＣＤに内接している。　正方形の1辺がaのとき、等円の半径を求めよ。



2 (1) 不等式　$x^2-3x+2<0$　を解け。

(2) $P=\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+2$　の正負を判定せよ。　ただし$\sqrt[3]{7}$は3乗したら7になる実数を表わす。

(3) P に実数を掛けて整数にしたい。　整数値と掛ける実数を求めよ。

3　1から8までの整数8個を4個ずつ2組に分け、それぞれの組の4数の和が等しくなるようにする。　このような分け方をすべてかけ。

4　半径が$\sqrt{3}$である円形の時計の文字盤がある。　1時，9時，3時を示す点をそれぞれA，B，Cとし　12時，8時，4時を示す点をそれぞれD，E，F，として△ABC，△DEFを作る。

(1) 題意に適する図をかけ。　(freehandでもよい)

(2) 2つの三角形の共通部分の面積を求めよ。

第　2　部

1 正方形ABCDと2点P, Qがある。

2点P, Qは次の条件をみたしている。

① Pは辺BC上，Qは辺CD上にある。

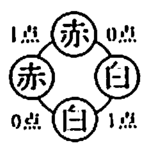
② $\angle PAQ=45°$である。

このとき次の各問に答えよ。

(1) 題意に適する図を書け。(free handで概形でよい)

(2) $BP+QD=PQ$を証明せよ。

2 円周上にn個のランプがある。スイッチを入れたときに各ランプは赤か白かのいずれかの色を発する。赤か白かの確率はいずれのランプも$\frac{1}{2}$である。もし隣りあったランプが同じ色ならば1点，違っていたら0点とし，すべての隣りあうn組の点数の総計を1回あたりの点数とする。

例えば$n=4$で 

ならば$1+0+1+0=2$で点数は2と計算する。

(1) $n=3$としたときに1回に取り得る点数をすべて求め，そのおのおのの点数についての確率を求めよ。

(2) また$n=6$のとき上と同様にそのおのおのの点数についての確率を求めよ。

3 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n$,　$b_1>b_2>b_3>\cdots>b_n$　のとき次の不等式を証明せよ。

(1) $a_1b_1+a_2b_2>\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1+b_2)$

(2) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4>\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)$

(3) $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n>\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$\boxed{4}$ pは素数，aは　$1 \leqq a \leqq p-1$　をみたす自然数とする。

集合Aを$A=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, p-1\}$とする。

Aの各要素nに対してanをpで割ったときの余りを$f_a(n)$と書く。

(例えば$p=5$のとき$f_2(3)=1$となる。)

集合$B=\{f_a(1), f_a(2), \cdots\cdots, f_a(p-1)\}$とするとき，次の各問に答えよ。

(1)　$m \neq n$のとき$f_a(m) \neq f_a(n)$を証明せよ。

(2)　$A=B$を示せ。

3　解　答

第1回　コンテスト

第1部　問題　1

半径の等しい三つの円P，Q，R，が互いに外接し、しかも正方形ＡＢＣＤに内接している。正方形の１辺がａのとき、等円の半径を求めよ。

第1部　問題　1の解

３つの等円の半径をｒ、.Pを通りＡＢ，ＢＣに平行な直線とQ，Ｒを通りＣＤ，ＡＤにそぞれ平行な直線で囲まれた正方形をＰＥＦＧ，ＰＥ＝ｂ　ＰＦとＱＲの交点をＨとする。
$PH=\sqrt{3}r$，$QH=HF=r$，$PF=\sqrt{2}b$より$\sqrt{3}r+r=\sqrt{2}b$，$b=a-2r$より

$$\sqrt{3}r+r=\sqrt{2}(a-2r)$$

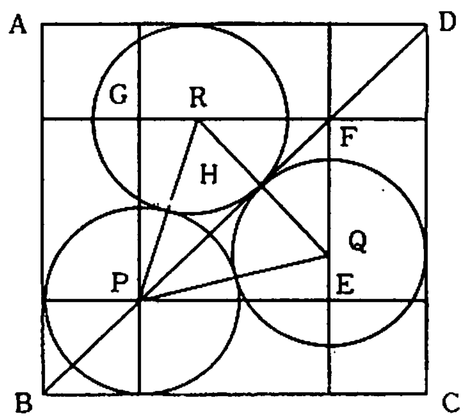
$$(\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1)r=\sqrt{2}a$$

$$r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}a$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}+1-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+1)^2-3}a$$

$$=\frac{(3-2\sqrt{2})\cdot(4+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2(3+2\sqrt{2})\cdot(3-2\sqrt{2})}a$$

$$=\frac{8-5\sqrt{2}-3\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{2}a$$ ……………………（答）



点Pを通りBCに平行な直線とQを通りCDに平行な直線との交点をEとすると

$\angle DPE=45^\circ$

$\angle DPQ=30^\circ$より

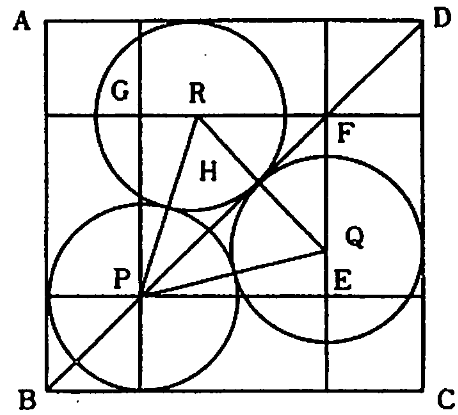
$\angle QPE=15^\circ$

等円の半径をrとすると

$BC=2r+PE$

$=2r+2r\cos 15^\circ=a$

$\cos 15^\circ$は加法定理又は



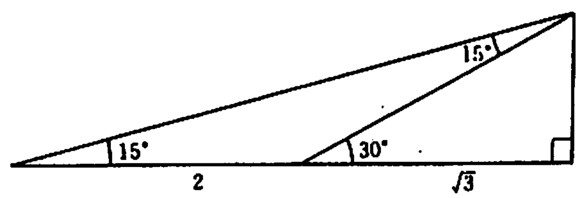
図より

$$\cos 15^\circ=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ で求める



等円の半径をr，円Rと円Qの接点をS，また円RとADの接点をTとする。

$\therefore$　$\triangle RTD\equiv\triangle RSD$を示し

$\angle RDS=\frac{45^\circ}{2}$

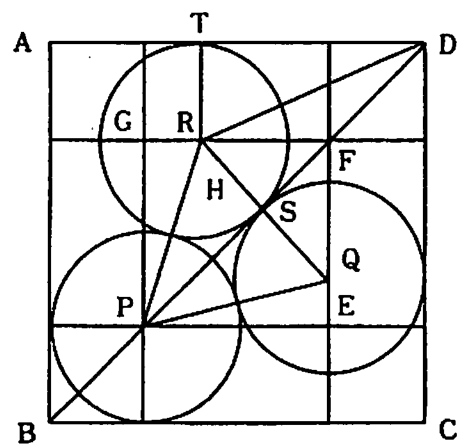
$$SD=\frac{r}{\tan\frac{45^\circ}{2}}$$

$$\tan\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

$\therefore$　$SD=\frac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

$BD=BP+PS+SD$ を解く



点P，Rを通りBCに平行な直線とQを通りCDと平行な直線との交点をEF，等円の半径をrとする。

$PQ=2r$

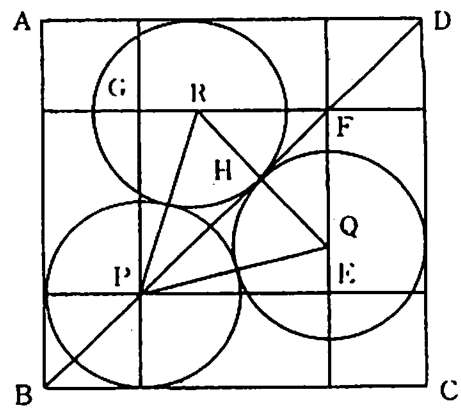
$PE=a-2r$

$QF=QR\cos 45^\circ=\dfrac{2r}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}r$

$\therefore\ QE=a-2r-\sqrt{2}r$

$\angle PEQ=\angle R$ より

$PQ^2=PE^2+QE^2$ より求められる



第1部 問題 2

（1）不等式 $X^2-3X+2<0$ を解け。

（2）$P=\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+2$ の正負を判定せよ。ただし $\sqrt[3]{7}$ は3乗したら7になる実数を表す。

（3）Pに実数を掛けて整数にしたい。整数値と掛ける実数を求めよ。

第1部 問題 2の解

（1）
$$X^2-3X+2<0$$
$$(X-1)(X-2)<0$$
$$1<X<2$$ ……………………（答）

（2）
$$P=(\sqrt[3]{7})^2-3\sqrt[3]{7}+2$$
$$=(\sqrt[3]{7}-1)(\sqrt[3]{7}-2)$$
$1<7<8$，より $1<\sqrt[3]{7}<2$
$$\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+2<0$$ ……………………（答）

（3）
$$P\cdot(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1)(\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{7}+4)$$
$$=(\sqrt[3]{7}-1)(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7}+1)(\sqrt[3]{7}-2)(\sqrt[3]{7^2}+2\sqrt[3]{7}+4)$$
$$=-6$$ ……………………（答）
$$(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7}+1)(\sqrt[3]{7^2}+2\sqrt[3]{7}+4)$$
$$=7\sqrt[3]{7^2}+13\sqrt[3]{7}+25$$ ……………………（答）

第1部　問題　3

1から8までの整数8個を4個ずつ2組に分けそれぞれの組の4数の和が等しくなるようにする。このような分け方をすべてかけ。

第1部　問題　3の解

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

よって4数の和が18になるように組分けをするとよい。2つの組がいれかわる場合があるので一方の組には1が必ず含まれるから、1を含む組について考える。小さい数を順に加えて組を作ると

(1 2 7 8)　(1 3 6 8)　(1 4 5 8)　(1 4 6 7)

(1 a b c)，$a \geqq 5$とすれば

$5 \leqq a < b < c$　より

$a+b+c \geqq 5+6+7=18$となり4数の和が18になることはない。よって以上の4通りであるからもう1方の組も合わせて示すと次の通りである。

$$\binom{1\,2\,7\,8}{3\,4\,5\,6}\ \binom{1\,3\,6\,8}{2\,4\,5\,7}\ \binom{1\,4\,5\,8}{2\,3\,6\,7}\ \binom{1\,4\,6\,7}{2\,3\,5\,8}$$ ………………… (答)

第1部　問題　4

半径が$\sqrt{3}$である円形の時計の文字盤がある。1時，9時，3時を示す点をそれぞれA，B，Cとし、12時，8時，4時を示す点をそれぞれD，E，F，として△ABC，△DEFをつくる。

(1) 題意に適する図をかけ。（f r e e h a n dでよい）

(2) 2つの三角形の共通部分の面積を求めよ。

第1部　問題　4の解

(1) 右図のとおり。

(2) DE，DFとBC　の交点をI，J，BAとの交点をH，G，円の中心をOとする

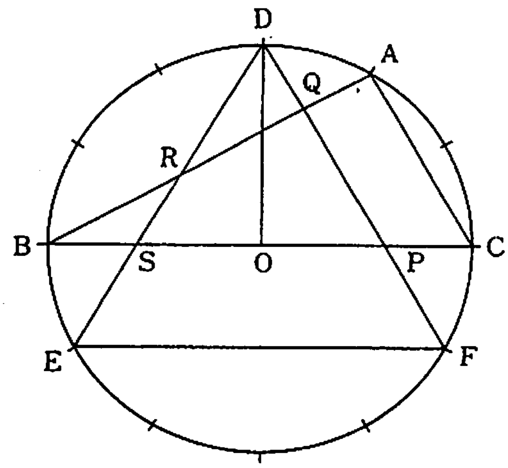
$DO \perp BC$，OD＝半径＝$\sqrt{3}$，OJ＝1，OよりACに垂線を下ろし、足をL

OLとDFの交点をKとすると

$\triangle ABC \backsim \triangle KOJ$　OはBCの中点

$OL /\!/ BA$，AL＝LC，BC＝$2\sqrt{3}$

AC＝$\sqrt{3}$　　$\therefore$ AL＝KG＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$JK=\frac{1}{2}OJ=\frac{1}{2}$

BC// EFより△DIJは正三角形

$DJ=2OJ=2$, $DG=2-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ DF⊥ABより

$HG=\sqrt{3}DG=\frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}$

$\triangle DHG=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}-3}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}-18}{8}=\frac{6\sqrt{3}-9}{4}$

$\triangle DIJ=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

よって共通部分の面積をSとすると　$S=\sqrt{3}-\frac{6\sqrt{3}-9}{4}=\frac{9-2\sqrt{3}}{4}$ (答)

解答例2

(2) 円の中心を0 (0,0), B $(-\sqrt{3},0)$, C $(\sqrt{3},0)$,
D $(0,\sqrt{3})$ とすると

A $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$

E $\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

F $\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

直線AB：$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})$ ……①

直線DE：$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ ………②

直線DF：$y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ ……③

ABとDEの交点をGとすると

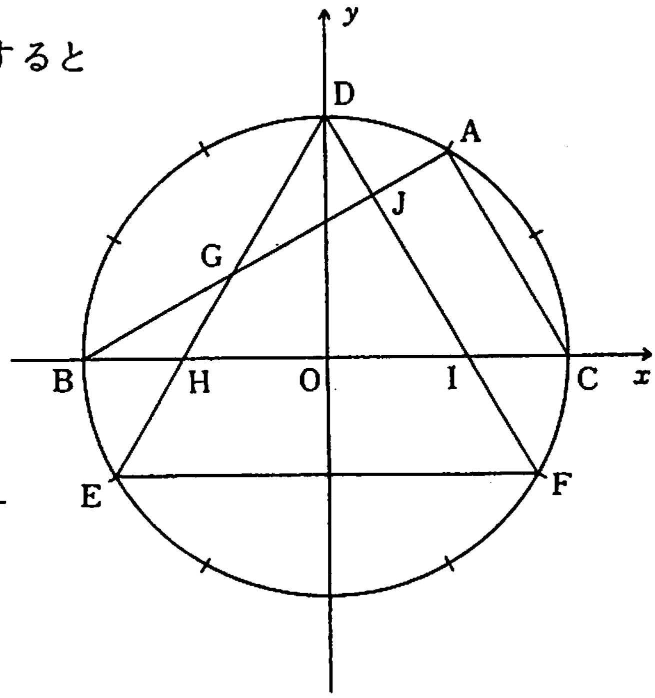
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})=\sqrt{3}x+\sqrt{3} \quad 2x=\sqrt{3}-3$$

$$\therefore \quad x=\frac{\sqrt{3}-3}{2},\ \ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+1=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{G}\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$$

BCとDE，DFの交点をH, Iとすると

$\mathrm{H}(-1,0) \quad \mathrm{I}(1,0)$



AB, DFの交点をJとすると

$$(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}})x+1-\sqrt{3}=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

$$y=\frac{3\sqrt{3}-3}{4}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

$$\therefore \quad \mathrm{J}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4},\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$$

四角形GHIJ＝△GHI＋△GIJ

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}-5}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right|$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9-2\sqrt{3}}{4}$$

昭和57年度(昭和58年 1 月15日実施)

第 1 回
北海道高等学校数学コンテスト
第 2 部

解　答 と 解　説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

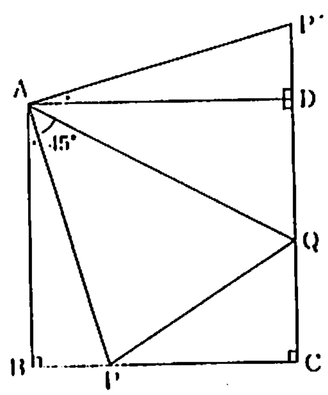
> 正方形ABCDと２点P, Qがある。２点P, Qは次の条件をみたしている。
>
> ① PはBC上，Qは辺CD上にある。
>
> ② $\angle PAQ = 45°$である。
>
> このとき次の各問に答えよ。
>
> (1) 題意に適する図を書け（free handで，概形でよい）
>
> (2) $BP + QD = PQ$を証明せよ。

着眼点

題意を適確な把握と，推論に必要な関係を見出すための図形を書く必要がある。free handであっても，推論に役立つような図形を書くように心掛けることである。

BPとQPが離れていると，BP＋QDの長さはPQと比べづらい。移動させて（又は等しい長さをとり）合せた長さを作るか，PQを２つに分けて，それぞれがBP，QDに等しいことを示す。

解答



(1) $\triangle APQ$と$\triangle AP'Q$で

$AP = AP'$

$\angle PAQ = \angle QAP' = 45°$

$AQ =$ 共通

$\therefore\ \triangle APQ \equiv \triangle AP'Q$

$PQ = P'Q = P'D + DQ = BP + DQ$

Q. E. D

(2) CDの延長上に$DP' = BP$となるように点P'をとると$\triangle ADP'$と$\triangle ABP$で

$AD = AB$

$DP' = BP$

$\angle ADP' = \angle ABP = 90°$

$\therefore\ \triangle ADP' \equiv \triangle ABP$となり

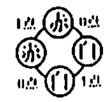
$\angle DAP' = \angle BAP$

$\angle QAP' = \angle QAD + \angle DAP'$

$= (90° - \angle BAP - 45°) + \angle DAP'$

$= 45°$

2

> 円周上にn個のランプがある。スイッチを入れたときに各ランプは赤か白かのいずれかの色を発する。赤か白かの確率はいずれのランプも$\frac{1}{2}$である。もし隣りあったランプが同じ色ならば１点違っていたら０点とし，すべての隣りあうn組の点数の総計を１回あたりの点数とする。
>
> 例えば$n=4$で  ならば$1+0+1+0=2$で点数は２と計算する。
>
> (1) $n=3$としたときに，１回に取り得る点数をすべて求め，その各々の点数についての確率を求めよ。
>
> (2) 又$n=6$のとき上と同様に，その各点についての確率を求めよ。

着眼点

題意より円順列とは区別して考える。

赤白のランプの数からその位置による各得点の確率を求める。ランプの数も３と６で多くないから，具体的にそれぞれの場合について調べる。すべての場合をつくしているとき，確率の合計は１となることで確認する。

解答

(1) 赤と白の個数と得点組の個数を調べる。

赤	白	点　数	組の個数
3	0	3	1
2	1	1	3

赤と白とを逆にしても同様のことが起る。ランプの点灯の仕方は2^3通りですべて等しいから，求める確率は

$$\begin{cases} 3点のとき & 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \\ 1点のとき & 2\times 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

(2) (1)と同様にして

赤	白	場合	点数	組の個数
6	0		6	1
5	1		4	6
4	2	白2コが隣り合う	4	6
		白2コが離れる	2	$\frac{6\times3}{2}$

以上の場合は赤と白とを逆にしても同様のことが起こる。

3	3	白が3コ続く	4	6
		白が2コ隣り合い1つは離れる	2	6×2
		白が3コとも離れる	0	2

以上より点数の可能性は 0，2，4，6 の4通りしかない。

ランプの点灯の仕方は 2^6 通りですべて確率は等しいから次の表を得る。

点数	確率
0	$\frac{2}{2^6}=\frac{1}{32}$
2	$\frac{1}{2^6}\left(\frac{6\times3}{2}\times2+6\times2\right)=\frac{15}{32}$
4	$\frac{1}{2^6}(6\times2+6\times2+6)=\frac{15}{32}$
6	$\frac{1}{2^6}(1\times2)=\frac{1}{32}$

3

$a_1>a_2>a_3>a_4>\cdots>a_n$, $b_1>b_2>b_3>b_4>\cdots>b_n$ のとき次の不等式を証明せよ。

(1) $a_1b_1+a_2b_2>\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1+b_2)$

(2) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4>\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)$

(3) $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n>\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

着眼点

(1) $a_1>a_2$ より $a_1-a_2>0$ を利用する。

(2) (1)を証明するときの $a_1b_1+a_2b_2>a_1b_2+a_2b_1$ を利用する。

(3) (2)を n までひろげる $a_1(b_2+b_3+\cdots+b_n)$ と a_k (………)のとき b_k が抜けることに注意する。

解答

(1)
$$a_1b_1+a_2b_2-\frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(a_1b_1+a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a_1-a_2)b_1-(a_1-a_2)b_2\}$$
$$=\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1-b_2)$$

$a_1>a_2$, $b_1>b_2$ より $(a_1-a_2)(b_1-b_2)>0$

$\therefore\ a_1b_1+a_2b_2>\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1+b_2)$

(2) (1)より $a_1b_1+a_2b_2>a_1b_2+a_2b_1$

同様に $a_1b_1+a_3b_3>a_1b_3+a_3b_1$

$a_1b_1+a_4b_4>a_1b_4+a_4b_1$

$a_2b_2+a_3b_3>a_2b_3+a_3b_2$

$a_2b_2+a_4b_4>a_2b_4+a_4b_2$

$a_3b_3+a_4b_4>a_3b_4+a_4b_3$

辺々を加えて

$3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)$
$>\{a_1(b_2+b_3+b_4)+a_2(b_1+b_3+b_4)+a_3(b_1+b_2+b_4)+a_4(b_1+b_2+b_3)\}$

両辺に $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$ を加えて

$\therefore\ 4(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)$
$>\{a_1(b_1+b_2+b_3+b_4)+a_2(b_1+b_2+b_3+b_4)+a_3(b_1+b_2+b_3+b_4)+a_4(b_1+b_2+b_3+b_4)\}$

$\therefore\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4>\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)$

(3) (1)より $a_1b_1+a_2b_2>a_1b_2+a_2b_1$

$a_1b_1+a_3b_3>a_1b_3+a_3b_1$

…………………………

$a_1b_1+a_nb_n>a_1b_n+a_nb_1$

$a_2b_2+a_3b_3>a_2b_3+a_3b_2$

…………………………

$a_2b_2+a_nb_n>a_2b_n+a_nb_2$

…………………………

$a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n>a_{n-1}b_n+a_nb_{n-1}$

辺々を加えて

$(n-1)(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)>\{a_1(b_2+b_3+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_3+\cdots+b_n)+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})\}$

$\therefore\ n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)>(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$\therefore\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n>\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

4

> pは素数，aは$1\leqq a\leqq p-1$をみたす自然数とする。
> 集合Aを$A=\{1, 2, 3\cdots\cdots p-1\}$とする。Aの各元$n$に対して$a\cdot n$を$p$で割ったときの余りを$f_a(n)$と書く。
> (例えば$p=5$のとき$f_2(3)=1$となる。)
> 集合$B=\{f_a(1), f_a(2), \cdots\cdots f_a(p-1)\}$とする。
> このとき次の問に答えよ。
> (1) $m\neq n$のとき$f_a(m)\neq f_a(n)$を証明せよ。
> (2) A=Bを示せ。

着眼点

(1) 問題を把握するために具体的な数，例えば$p=3$とか5等の素数を与えて考えてみる。一般に整数に関する証明は背理法が有効である。

$m\neq n$のとき$f_a(m)=f_a(n)$と仮定しpが素数であることを使って矛盾を導く。

(2) 有限個の要素の集合であるから($A\leqq B$, $A\geqq B$よりA=Bとしなくとも)要素の個数大きさを調べることにより等しいことを示す。

$f(n)$はpで割った余りを表わすから$f_a(n)$は$0, 1, 2\cdots\cdots p-1$のいずれかである。

A=Bを示すには$f(n)\neq 0$で$f(1), f(2)\cdots f(p-1)$がすべて異なることを示すとよい。

解答

(1) $m\neq n$のとき$f(m)=f(n)$と仮定する。

$f_a(m)=f_a(n)=C$とおく。

$m<n$と仮定すると　$1\leqq m<n\leqq p-1$である。

定義より

$$\begin{aligned} an&=kp+C \\ am&=\ell p+C \end{aligned} \quad (k, \ell\text{は整数})$$

とおける。よって

$$a(n-m)=(k-\ell)p$$

従って$a(n-m)$はpで割り切れる。

pは素数だからa又は$n-m$の少なくとも一方はpで割り切れなければならない。ところがaも$n-m$も1以上$p-1$以下の数だからpで割り切れない。これは矛盾である。

$\therefore\ f_a(m)\neq f_a(n)$

(2) $f_a(n)$はanをpで割った余りだから$0\leqq f_a(n)\leqq p-1$のいずれかである。

(i) $f_a(n)\neq 0$である。

$f(n)=0$と仮定すると$(1\leqq n\leqq p-1)$

naがpで割り切れることである。pは素数だからnかaがpで割り切れる。ところが$1\leqq n\leqq p-1$, $1\leqq a\leqq p-1$よりnaはpで割り切れない。

$\therefore\ f_a(n)\neq 0$……………………ⓔ

ⓔより$f_a(n)$は$1, 2, \cdots\cdots, p-1$, のどれかであり(1)より$f_a(1), f_a(2), \cdots\cdots f_a(p-1)$はすべて異なるから$\{f_a(1), f_a(2)\cdots\cdots f_a(p-1)\}$は全体として$\{1, 2\cdots\cdots p-1\}$に一致する。

$\therefore$　A=B

第　1　回

北海道高等学校数学コンテスト

採 点 を 終 え て

昭和58年１月15日(土)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第1回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長　細　川　征　一

アメリカやソ連には既に相当の歴史をもって、日本の中学生・高校生と同じ学齢の生徒を対象にした〝数学オリンピック〟と呼ばれる催しが行われております。

ソ連では遠く1933年からモスクワやレニングラードの大学の先生達の主導で数学オリンピック大会が行われ、1959年にはそれが東欧圏の諸国を含む国際数学オリンピックの開催にまで発展するに到りました。

アメリカでもかのスプートニク・ショック以来負けじと英才開発のため、同じような催しを試みているようです。

これらの試みの主旨はすべてその国の中等学校生徒の数学に関する資質の向上をはかり、また能力のある生徒を発見してそれを更に開発することが第一のねらいであるようですが、よく考えてみますと同じ年代の然も同じ学問分野に興味関心を強くもつ人達がこのような催しを通じて互いに競いあい、且つそれをきっかけにして友情を結びあう可能性をもつことは、それだけでも素晴しく意義のあることだと思います。

〝コンテスト〟や〝オリンピック〟は決して序列を決めるためや合格不合格を判定するためにやるのではありません。数学という学問を愛しそして日頃真面目に勉強しておられる皆さんに、より広く高い見地から言わば部活動の試合のように優劣を競いあってほしいのです。

秀れた成績を収めた人は大いに自信をもって更に精進を重ねて将来の大成を期してほしいものですし、参加した人全部が夫々の学校における数学同好グループの中心としてもっともっと勉強してほしいものだと思います。

僅か北海道の一角から呱々の声をあげたこのコンテストですけれども、ねらいや望みは決して小さくはありません。欧米のオリンピックが既に若い才能の開発やその地域の数学教育のレベルアップに大きな実績を示しているのに劣らない発展を期待しているのです。

第一回というので参加した皆さんも戸惑われたり不安を感じられたかも知れませんが、幸い道教育委員会の暖いご理解がありましたし、北海道新聞社・福武書店の御支援は主催に当って何より心強いものがありました。然し何といってもこの試みを成功させるのに力を尽くされたのは市内近隣の大学高校の有志の先生方(その殆どは北数教高校部の研究部の方ですが)です。その奉仕的な御活動に深く敬意を表する次第です。

●成績優秀者

阿部一彦　小山忠義　鎌田英司　進藤欣也
吉田茂生　濟　史弘　佐藤嘉高　稲場千佳郎
松倉文礼　吉田直樹　門村佳史
市川　展　長尾隆広　国上真章

第1回　北海道高等学校数学コンテスト

度数分布表(1)

	Ⅰ				Ⅱ			
点数	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
25		8	8	6	35	45	7	1
24		3				1		
23		2				3	1	
22		3						2
21		6				2		
20	8		88	3	24	5	13	
19			4					2
18			2	2		3	3	3
17		1	5				2	
16		60	1			30	12	
15	1	1	89	1	35	1		1
14			3			9	1	1
13		14	14			22		1
12		16	3	21		1	6	
11			7			10	1	3
10	13		1	1	127	30	7	2
9		1	2	1				
8		2		2		36	94	1
7		123		1				15
6		1				2	3	4
5	3	1	2	222	43	34		1
4						1	31	15
3		7		1	2	7		35
2							4	
1								
0	242	18	38	6	1	25	82	180
人数	267	267	267	267	267	267	267	267
合計	320	2794	3883	1668	3371	3238	1807	563
平均	1.1	10.4	14.5	6.2	12.6	12.1	6.7	2.1
S.D	4.0	5.9	6.7	4.0	6.2	7.7	6.4	4.2

度数分布表(2)

点数	Ⅰ	Ⅱ	点数	総点
100～96			200～191	
95～91			190～181	
90～86			180～171	
85～81		1	170～161	
80～76	1	2	160～151	
75～71		2	150～141	1
70～66		6	140～131	2
65～61	5	10	130～121	4
60～56	8	12	120～111	3
55～51	4	13	110～101	14
50～46	12	11	100～ 91	22
45～41	24	26	90～ 81	19
40～36	42	23	80～ 71	31
35～31	59	24	70～ 61	46
30～26	50	46	60～ 51	49
25～21	30	25	50～ 41	47
20～16	18	35	40～ 31	19
15～11	9	17	30～ 21	7
10～ 6	3	13	20～ 11	3
5～ 0	2	1	10～ 0	
人数	267	267		267
合計	8665	8979		17644
平均	32.4	33.6		66.0
S.D	11.1	16.1		23.4

第　1　部

1

(1) 図形の問題は苦手なのか度数分布表にも見られる通り出来が悪い。図形から関係を読みとることも数学の大切な力である。勉強してほしい　解答の中に

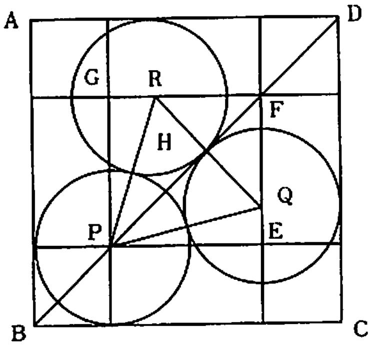
(i) 正方形の1辺aと半径rの関係に結びつけたもの

(ii) 正方形の対角線の長さに結びつけたもの

(iii) 2円の中心間の距離2rをピタゴラスの定理を利用したもの等の考え方により解答している答案があった。記載しておいたので今後の学習の参考にしてほしい。

(i) 正方形の1辺aと半径rの関係に結びつけたもの

解答例 1



点Pを通りBCに平行な直線とQを通りCDに平行な直線との交点をEとすると

$\angle DPE=45^\circ$

$\angle DPQ=30^\circ$より

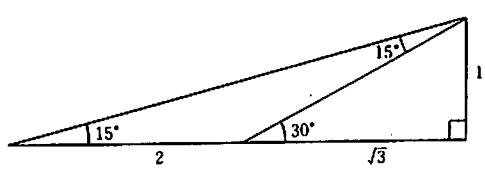
$\angle QPE=15^\circ$

等円の半径をrとすると

$BC=2r+PE$

$=2r+2r\cos15^\circ=a$

$\cos15^\circ$は加法定理又は



図より

$$\cos15^\circ=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}}$$

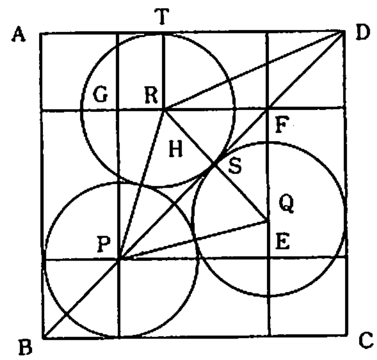
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$　で求める

(ii) 正方形の対角線の長さに結びつけたもの
(解答と解説に上げた外に)

解答例 2



等円の半径をr，円Rと円Qの接点をS，また円RとADの接点をTとする。

$\therefore$　$\triangle RTD\equiv\triangle RSD$を示し

$$\angle RDS=\frac{45^\circ}{2}$$

$$SD=\frac{r}{\tan\frac{45^\circ}{2}}$$

$$\tan\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos45^\circ}{1+\cos45^\circ}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

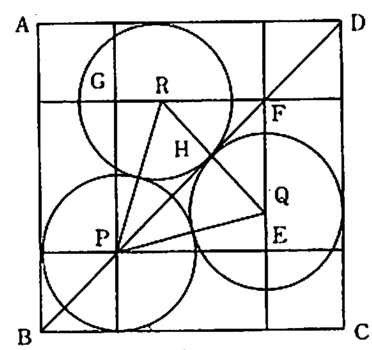
$$=\sqrt{2}-1$$

$\therefore$　$SD=\dfrac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

$BD=BP+PS+SD$ を解く

(iii) 2円の中心間の距離2rをピタゴラスの定理を利用したもの

解答例 3



点P，Rを通りBCに平行な直線とQを通りCDと平行な直線との交点をEF，等円の半径をrとする。

$PQ=2r$

$PE=a-2r$

$QF=QR\cos45^\circ=\dfrac{2r}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}r$

$\therefore$　$QE=a-2r-\sqrt{2}r$

$\angle PEQ=\angle R$より

$PQ^2=PE^2+QE^2$　より求められる

2

(1) 不等式　$X^2-3X+2<0$ を解くことは特に問題は無いが

(2) $P=\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+2$ の正負の判定に(1)を利用することに気が付かない人が多かった。

$\sqrt[3]{49}=(\sqrt[3]{7})^2=X^2$　$(\sqrt[3]{7}=X)$ のように文字の置換えも問題を解きやすくする。心掛けてほしい。

(3) P に実数を掛けて整数にしたい。問題にミスがあり 0 を掛ける答案が出るのでないかと思っていたが，そのような答案は 1 枚も無かった。

解答の仕方は解答例に示した解ぐらいと思っていたが，(2)，(3)に別の解答をした答案もあった。

(2) **解答例 2**

$1.9<\sqrt[3]{7}<2$　$(\because\ 1.9^3=6.859)$ ……①

$3.6<\sqrt[3]{49}<3.7\begin{pmatrix}3.6^3=46.656\\3.7^3=50.653\end{pmatrix}$ ………②

①より

$5.7<3\sqrt[3]{7}<6$ …………………③

②より

$5.6<\sqrt[3]{49}+2<5.7$ …………④

③より

$-6<-3\sqrt[3]{7}<-5.7$ …………⑤

④,⑤より

$-0.4<\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+2<0$

$\therefore$　$P<0$

(3) **解答例 2**

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ の利用

$\sqrt[3]{7}=x$ とおく

$\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+2=x^2-3x+2$

$(x^2-3x+2)\ \{(x^2)^2+(-3x)^2+2^2-x^2(-3x)-(-3x)2-2\cdot x^2\}=-6$

3

1 から 8 までの 8 数を 4 数ずつ 2 組に分け和を等しくするのであるが，1 つ 1 つの場合について調べることにより場合の数を求めることが基本である。この場合，落ちが無いように規則を決めて順序よく組を作らなければならない。更にここでは，もうこれ以上組分けが無いことを示すことがポイントになるが，この点をおさえて解答している答案が少なかった。

答案の中に次のような解答があった。

解答例 1

1，2，3，4，5，6，7，8 を 2 組に分けるから1組の 4 数の和が18になるとよい

1，2，3，4 の 3 数の和の最大数は $9+3+4=9$，5，6，7，8 の最大数は 8 だから4数の和は18にならない。

又，5，6，7，8 の 3 数の最小値は $5+6+7=18$ だから 1 ～ 4 の 2 数を含めて18になるようにするとよい。

1 ～ 4 の 2 数の和は $1+2=3, 1+3=4, 1+4=5$ の 3 通りのみであるから求める組は

(1 2 7 8)と(3 4 5 6)

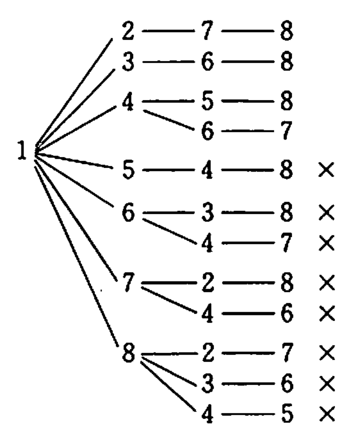
(1 3 6 8)と(2 4 5 7)

(1 4 5 8)と(2 3 6 7)

(1 4 6 7)と(2 3 5 8)

解答例 2

1 から 8 までの数全部をたすと36になる。これを等しい 2 組に分けるには，たした数が18となるように分けるとよい。1 組には必ず 1 が含まれるから 1 を含む組について調べる。



以上より

(1 2 7 8)と(3 4 5 6)

(1 3 6 8)と(2 4 5 7)

(1 4 5 8)と(2 3 6 7)

(1 4 6 7)と(2 3 5 8)

の 4 通り

④

(1) 題意に従って図を書く問題だから出来はよかった。

(2) 共通部分の面積を求めるのであるが出来は悪かった。幾何は高等学校の教材でなくなっていることもあると思うが，思考過程はこれからの数学学習に役立つので積極的に学習してほしい。

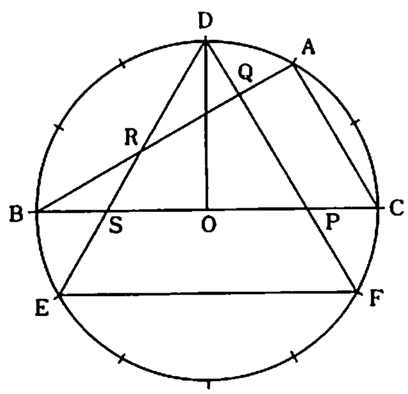
採点してみて解答と解説の解答例のような解き方が比較的多かったが，他に次に上げるような解答 (i) △ABCから求める方法 (ii) 座標を利用して求める方法もあった。参考にしていただきたい。

採点してみて気がついたのだが，問題に与えられていない記号，文字については必ず定義を与えてから用いるようにしていただきたい。(慣習として点はアルファベットの大文字，直線は小文字を用いて表わす)

更にどのようにして面積を求めるのか方針が読みとりずらい答案が多かったが，きちんとした方針を立てて，その方針に従って答を導くようにするようにしてほしい。

解答例1

(1) 右図



(2) 線分DFと線分BC, ABの交点をP, Q, 線分DEと線分AB, BCの交点をR, S, BCの中点をOとする。

AC // QP

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle QBP$

DO$=\sqrt{3}$, $\angle BPQ=60°$より

OP$=1$

$\therefore$ BP$=\sqrt{3}+1$

$\therefore$ PQ$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, BQ$=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

$\triangle QBP=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$

BS$=\sqrt{3}-1$

$\angle RSP=60°$より $\angle ABS=\angle SRB=30°$

$\angle BSR=120°$

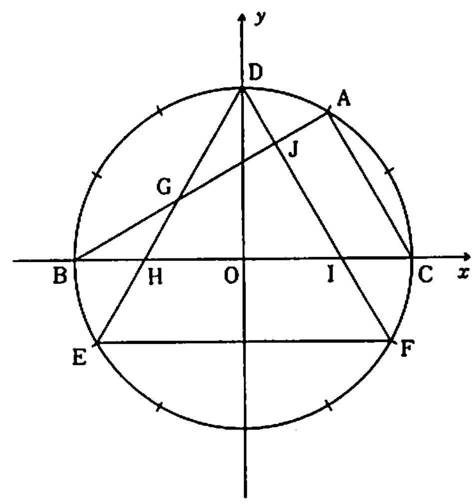
$\triangle BSR=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2 \sin 120°=\dfrac{(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}$

四辺形PQRS$=\dfrac{1}{4}(3+2\sqrt{3})-\dfrac{(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+2-4+2\sqrt{3})$

$=\dfrac{9-2\sqrt{3}}{4}$

解答例2



(2) 円の中心をO $(0,0)$, B$(-\sqrt{3},0)$, C$(\sqrt{3},0)$, D$(0,\sqrt{3})$とすると

A$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

E$\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

F$\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

直線AB：$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})$……①

直線DE：$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$………②

直線DF：$y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$……③

ABとDEの交点をGとすると

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$　$2x=\sqrt{3}-3$

$\therefore$ $x=\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ G$\left(\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}, \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$

BCとDE, DFの交点をH, Iとすると

H$(-1,0)$　I$(1,0)$

AB, DFの交点をJとすると

$$\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x+1-\sqrt{3}=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

$$y=\frac{3\sqrt{3}-3}{4}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

$$\therefore\quad \mathrm{J}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4},\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$$

四角形GHIJ＝△GHI＋△GIJ

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}-5}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right|$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9-2\sqrt{3}}{4}$$

第 2 部

1

解答は大別して次の３つになる。

1．図形移動
2．補助線などを使う。
3．角や線分に長さを与えて計算

1．では着想として良いが，表現記法に不足な所が見出される。

特に自分が図形の上で感じたもの(等長など)を証明無しに認めてしまうという欠点が多い。

2．AからPQに垂線をひく

BPに等しい線分をPを端長としてつくる。

などが目立つが，その後の処理を全うしていない。

3．三角比(三角関数)，座標，ベクトルなどが目立つが，正方形の１辺の長さ，BP，BDの長さを与えて関係を見出していく方法も多い。どれも計算が複雑になって，多くは途中で腰折れをしてしまう。

こうした計算での処理で特に注意してほしいのは，証明すべきものは何で，それに対して与えられたものは何かを，はっきりさせる事である。

この問題の解き方の例を別刷で示すので，参加者は自分の解答と比べて考え方を知ってもらいたい。

尚，図形移動の考え方は，このような図形だけでなく高校での関数，ベクトル，マトリクスなどの学習上に大きく役立つことを知らせておく。

2

確率の定義を知っていて，中学校の知識があれば解ける問題として出題した。ただ，型に当てはめて答を求めるのでなく，重複・遺ろうのないように，ていねいに場合を数えていくとよい。

答案を読んで感じたことは，式・説明の不足である。答案を計算用紙のように使ったり，ただ，答のみ書いている。今後，式・説明を整理して書く練習をしてもらいたい。

(1) ランプが円周上にあるが題意より円順列とは異なる。しかも，各々のランプは明らかに異なる。ランプが３個あり，その各々が赤か白に点灯するので，赤白の色に点灯する個数だけに注目すると，

(赤，白)＝(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3) の４通りある。例えば，(赤, 白)＝(2, 1)の場合，３個のランプは異なるから，$_3C_2=3$通りある。

点数は1＋0＋0＝1である。

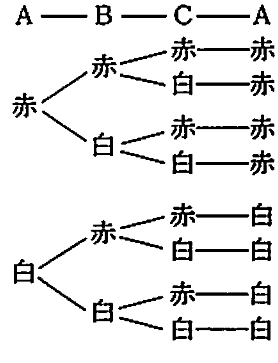
赤	白	点　数	組の個数	確　率
3	0	3	$_3C_3=1$	$\frac{1}{2^3}\times 1$
2	1	1	$_3C_2=3$	$\frac{1}{2^3}\times 3$
1	2	1	$_3C_1=3$	$\frac{1}{2^3}\times 3$
0	3	3	$_3C_0=1$	$\frac{1}{2^3}\times 1$

ランプの点灯の仕方は2^3通りであるから，上の表から３点，１点の確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{4},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2\times 3=\frac{3}{4}$$

となる。

ランプをA, B, Cとおき，樹形図をかいて求めてもよいが，A—B—CでなくA—B—C—Aである。

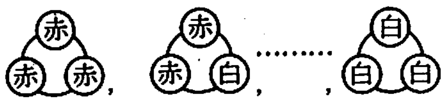


円順列と間違えたり，式・証明のない答案が多かった。

また，「3点の確率 $\frac{1}{4}$，1点の確率$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$」という答案も式・説明不足である。

(2) (1)と同様に(赤, 白)の組合せを考えていくとよい。

(1)で



と8通りに図をかいて，確率を求めた諸君が(2)でも64通りの図をかいて，正しい答を出していたが，やはり，64通りも図をかかず，整理し，答案をかいてほしい。解答例のように0，2，4，6点の各場合に分けて確率を求めてほしい。(1)同様，6点$\frac{1}{32}$，……，のように結果のみはまずい。

今後，日常の学習で答案をかく練習をしてほしいと思います。

$\boxed{3}$

証明問題のポイントは

(i) 論理の展開が正しいこと

(ii) 条件等がどのように用いられているか判然としていること

(iii) 結論がきちんと述べられていること

の3つである。

誤答の中で一番多かったのは

$a_1b_1+a_2b_2>\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1+b_2)$を証明するのに

最初から

$a_1b_1+a_2b_2>\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1+b_2)$が成り立つこと

を認めて推論しているものであった。

結論を最後に引き出すように。

論理を組み立てるように。

(2) $a_1>a_2>a_3>a_4$，$b_1>b_2>b_3>b_4$のとき

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4>\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$
$(b_1+b_2+b_3+b_4)$を証明せよ。

講評と解答例

「$a_1>a_2>\cdots>a_n$，$b_1>b_2>\cdots b_n$のとき

$a_1b_1+\cdots+a_nb_n>\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)$
を証明せよ」………(3)

において$\underline{n=4}$の場合である。

(1)において$\underline{n=2}$のとき証明しているので，(1)を利用すると比較的スマートにできる。ただし式の変形を用いて(1)を使わないでもできる。

解答例1

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1+b_2)+\frac{1}{2}(a_3+a_4)(b_3+b_4)$$
$$-\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)$$
$$=\frac{1}{4}\{(a_1+a_2)-(a_3+a_4)\}\{(b_1+b_2)-(b_3+b_4)\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(a_1-a_3)+(a_2-a_4)\}\{(b_1-b_3)+(b_2-b_4)\}$$

>0 より

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1+b_2)+\frac{1}{2}(a_3+a_4)(b_3+b_4)$$
$$>\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)$$

よって　(1)と同様に

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$$
$$>\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4)$$

(1)を用いないときは書き方に配慮が必要である。

A>Bを証明するためにはA−B>0をいえばよい。

「$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4>\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$
$(b_1+b_2+b_3+b_4)$ を証明する」……**解法例2**

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4-\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$$
$$(b_1+b_2+b_3+b_4)$$
$$=\frac{1}{4}(3a_1b_1+3a_2b_2+3a_3b_3+3a_4b_4-a_1b_2-a_2b_1$$
$$-a_1b_3-a_3b_1-a_1b_4-a_4b_1-a_2b_3-a_3b_2-a_2b_4$$
$$-a_4b_2-a_3b_4-a_4b_3)$$
$$=\frac{1}{4}\{(a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+a_2b_2)+(a_1b_1-a_1b_3$$
$$-a_3b_1+a_3b_3)+(a_1b_1-a_1b_4-a_4b_1+a_4b_4)$$
$$+(a_2b_2-a_2b_3-a_3b_2+a_3b_3)+(a_2b_2-a_2b_4$$
$$-a_4b_2+a_4b_4)+(a_3b_3-a_3b_4-a_4b_3+a_4b_4)\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_1-a_3)(b_1-b_3)$$
$$+(a_1-a_4)(b_1-b_4)+(a_2-a_3)(b_2-b_3)$$
$$+(a_2-a_4)(b_2-b_4)+(a_3-a_4)(b_3-b_4)\}>0$$

($\because$　$a_1>a_2>a_3>a_4$，$b_1>b_2>b_3>b_4$より)

よって

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4>\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$$
$$\times(b_1+b_2+b_3+b_4)$$

誤答の多くは変形しただけのもの，変形したが成立しない式をみちびいたものなどだった。

3．(3)　全体的に出来ていない。

解答例1　（$n=2,4$からの類推によるもの）

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)-\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \quad ㋐$$

$$=\frac{1}{n}\{(n-1)a_1b_1+(n-1)a_2b_2+\cdots+(n-1)a_nb_n-a_1(b_2+\cdots+b_n)-a_2(b_1+b_3+\cdots+b_n)-\cdots-a_n(b_1+\cdots+b_{n-1})\} \quad ㋑$$

$$=\frac{1}{n}[\{a_1(b_1-b_2)+a_1(b_1-b_3)+\cdots+a_1(b_1-b_n)\}+\{a_2(b_2-b_1)+a_2(b_2-b_3)+\cdots+a_2(b_2-b_n)\}+\cdots+\{a_n(b_n-b_1)+a_n(b_n-b_2)+\cdots+a_n(b_n-b_{n-1})\}] \quad ㋒$$

$$=\frac{1}{n}[\{(a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_1-a_3)(b_1-b_3)+\cdots+(a_1-a_n)(b_1-b_n)\}+\{(a_2-a_3)(b_2-b_3)+\cdots+(a_2-a_n)(b_2-b_n) \quad ㋓ +\{(a_{n-1}-a_n)(b_{n-1}-b_n)\}$$

$$>0$$

◎いずれも説明不足で飛躍が多い。

特に多かったのは，㋐→㋓とすぐ書いているもの

㋐→㋑で終わっているもの

㋓→㋑

比較的，良く書いているのは，㋐→㋑→㋓

㋐→㋒→㋓

また，㋐→㋓を2重のシグマを使って，

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\{\sum_{\ell=k+1}^{n}(a_k-a_\ell)(b_k-b_\ell)\}>0$$

としているのには感心した。飛躍はあるが，大学並みの解答だろう。

まとめると，㋐→㋑→㋒→㋓の解答を期待したかったが，ここまで出来たのは，ただ1人だけだった。

解答例2　（数学的帰納法によるもの）

（命題）　$n\geqq 2$の自然数nについて，

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n>\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)$$

$n=2$のとき，(1)より成り立つ

$n=k(\geqq 2)$のとき成り立つと仮定すると

$$a_1b_1+\cdots+a_kb_k>\frac{1}{k}(a_1+\cdots+a_k)(b_1+\cdots+b_k)$$

が成立する。

$n=k+1$のとき，上式の両辺に$a_{k+1}b_{k+1}$を加えると

$$a_1b_1+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}>\frac{1}{k}(a_1+\cdots+a_k)(b_1+\cdots+b_k)+a_{k+1}b_{k+1}$$

よって，$n=k+1$のときを示すために，

$$※\quad \frac{1}{k}(a_1+\cdots+a_k)(b_1+\cdots+b_k)+a_{k+1}b_{k+1}>\frac{1}{k+1}(a_1+\cdots+a_{k+1})(b_1+\cdots+b_{k+1})$$

を証明する。

◎$n=k+1$のときまで出来ている者はいなかった。

この方法では，$a_1+\cdots+a_k=\mathrm{A}$, $b_1+\cdots+b_k=\mathrm{B}$とおいて※の式を証明するのがポイントであるが，そうしている者は1人もいなかった。次回に期待したいと思う。

「※の証明

$$\frac{1}{k}(a_1+\cdots+a_k)(b_1+\cdots+b_k)+a_{k+1}b_{k+1}-\frac{1}{k+1}(a_1+\cdots+a_{k+1})(b_1+\cdots+b_{k+1})$$

$$=\frac{1}{k}\mathrm{AB}+a_{k+1}b_{k+1}-\frac{1}{k+1}(\mathrm{A}+a_{k+1})(\mathrm{B}+b_{k+1})$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\{(k+1)\mathrm{AB}+k(k+1)a_{k+1}b_{k+1}-k(\mathrm{A}+a_{k+1})(\mathrm{B}+b_{k+1})\}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\{\mathrm{AB}-k\mathrm{A}b_{k+1}-ka_{k+1}\mathrm{B}+k^2a_{k+1}b_{k+1}\}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\{\mathrm{A}-ka_{k+1}\}\{\mathrm{B}-kb_{k+1}\}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}\{(a_1-a_{k+1})+\cdots+(a_k-a_{k+1})\}\{(b_1-b_{k+1})+\cdots+(b_k-b_{k+1})\}>0$$ より」

4

(1)　剰余と集合の組み合わされた問題であったためか，題意を理解できなかった人が多かった。

am, anをpで割った余り$f_a(m)$, $f_a(n)$に関する問題であるから，$f_a(m)$，$f_a(n)$を求めて調べなければならないのだが，$f_a(m)=\frac{am}{p}$とする答案が多かった。

剰余定理はすでに習っているのだから

$am=pk+f_a(m)$　（被除数＝除数×商＋余り）

すなわち$f_a(m)=am-pk$を期待していたのだが，予想は完全にはずれた。最初につまずいたためか白紙が多く，第2部4問中で最低の出来であった。具体的な数を用いて題意を把握することも重要である。

例えば　$p=5$，$a=3$，$m=2$のとき

$am=pk+f_a(m)$

$3\times2=5\times1+1$ より $f_3(2)=1$ など

$f_a(m)=am-pk$，$f_a(n)=an-p\ell$ より

$m\neq n$のとき　$am-pk\neq an-p\ell$

すなわち　$a(m-n)\neq p(k-\ell)$ ——①を証明すればよいのだが，pが素数であるという条件が上手に使えないようだ。

ここでは $a(m-n)$がpで割り切れないことを利用して①を示すのだが，背理法，対偶を示すことが有効である。

背理法を用いて証明しようとする人は多かったが，①を示すのに$a(m-n)=p(k-\ell)$からpは素数より，$a(m-n)$は$k-\ell$で割り切れるとして矛盾を導き出そうとする人もいた。

この場合，$k-\ell$は素数とは限らないので

(イ)　aが$k-\ell$で割り切れる

(ロ)　$m-n$が$k-\ell$で割り切れる

(ハ)　a，$m-n$が$k-\ell$の異なる因数をもつ

の3つの場合に分け，すべて矛循が生じることを示さなければならない。

やはり①を示すには，$a(m-n)=p(k-\ell)$から$a(m-n)$はpで割り切れるとして，pは素数という条件を使い，矛盾を導き出す方が簡単である。

m,nの大小関係だが，$m>n$としてさしつかえない。

(2)　集合A，Bが等しいことを示すのだが，要素は有限個であることに注意する。

Bの要素は(1)より $m\neq n$のとき $f_a(m)\neq f_a(n)$

すなわち

(ア)　$f_a(1),f_a(2),\cdots,f_a(p-1)$はすべて異なる一方，$an$を$p$で割った余りが$f_a(n)$だからBの要素は，$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$のいずれかである。

(イ)　$f_a(n)\neq0$　(Bの要素は$1,2,\cdots,p-1$)

この(ア)，(イ)〔すなわちAからBへの関数$f_a(n)$は上への1対1関数〕を示さなければならない。

(ア)に関しては，かなりの人がわかっていたようだが，全般的に解くための整理ができていない。

4.(1)

解答例

$f_a(m)=am-k_1p$

$f_a(n)=an-k_2p$

$f_a(m)=f_a(n)$になるためには $am-k_1p=an-k_2p$ であればよい。

$a(m-n)=(k_1-k_2)p$……………①

$m\neq n$のとき　aとpは互いに素だから①が成り立つためには$(a=p$かつ$m-n=k_1-k_2)$

または $a=k_1-k_2$かつ$m-n=p)$

$k_1-k_2=m-n$のとき　$p\neq a(\because a\leqq p-1)$　より①は成り立たない。

$a=k_1-k_2$のとき，$m-n\neq p(\because 1\leqq m\leqq p-1,$
$1\leqq n\leqq p-1$

$\therefore\ m-n\leqq p-2)$ より，①は成り立たない

$\therefore\ am-k_1p\neq an-k_2p$　よって$f_a(m)\neq f_a(n)$

(2)　Aには全て等しくない$p-1$個の要素がある。

$f_a(n)$はpで割ったあまりだから$f_a(n)\leqq p-1$，またanとpは互いに素だから $f_a(n)\geqq1$

$B=\{f_a(1),f_a(2),f_a(3),\cdots f_a(p-1)\}$において

$1\neq2\neq\cdots\cdots\neq p-1$ より

(1)より互いに等しくない$p-1$個の要素があり各要素nに対して$1\leqq n\leqq p-1$が成り立っている。

$\therefore\ B=A$