2次の恒等式は幾何学に変身する！

西谷優一　遺愛女子中学高等学校（函館）

例 1.　$(b-a)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$　…　①　はただの展開公式ですが、

a, b をベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に、積を内積に置き換えると

$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$　…　②

この等式は、$O(\vec{0}), A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とすれば、

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cos\theta$　（$\theta = \angle AOB$）

という幾何学的意味を獲得し、それは三角形の余弦定理に一致します。

代数的に同じ構造だから、①と②は互換性があります。ところが②は、内積さえ定義されていれば、その意味によっていろんな内容を持ちうるわけです。学校では余弦定理を先に学びます、その後でベクトルの分野で②が余弦定理と同じものだとわかって、それまで便利だけどあまり親しくなかった余弦定理に急に親しみを覚えたという人が多い。例 1 では、実数 a, b の 2 次の恒等式があれば、代数的に同じ構造であるベクトルの恒等式をつくることができて、それを図形的に意味のあるもので表現しなおすとどうなるか、という意識で表現してみました。1次元的なもの（恒等式）が、突然空間的な拡がりを獲得してしまう、といったイメージを感じていただけたでしょうか？

例2.　恒等式　$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$ で同じことを考えてみましょう。

これは、　$a^2 + b^2 = 2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}(b-a)^2$　と直しておいて

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 2\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}|\vec{b}-\vec{a}|^2$$

この等式から、$O(\vec{0}), A(\vec{a}), B(\vec{b})$ とし、M を線分 AB の中点とすれば、

$$OA^2 + OB^2 = 2OM^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

これは有名なパッポスの定理そのものですね。

図形的に意味のあるものを抽出するために、$l\vec{a} + m\vec{b} = (l+m)\dfrac{l\vec{a}+m\vec{b}}{l+m}$ という変形をしています。（$l+m \neq 0$）

$\dfrac{l\vec{a}+m\vec{b}}{l+m}$ は分点公式の形をしていますが、3 点以上出てくると面倒なので、力学の概念から、質量中心（物理的重心）としてとらえます。 $\dfrac{l\vec{a}+m\vec{b}}{l+m}$ は、点 $A(\vec{a})$ に l ,点 $B(\vec{b})$ に m の質量の質点（質量を持った点）を置いたときの質量中心（物理的重心）、$\dfrac{l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}}{l+m+n}$ は、点 $A(\vec{a})$ に l ,点 $B(\vec{b})$ に m ,点 $C(\vec{c})$ に n の質量の質点を置いたときの質量中心（物理的重心）として考えます。

例 3. $l(x-a)^2+m(x-b)^2=(l+m)x^2-2(la+mb)x+la^2+mb^2$ （これを平方完成して）

$$=(l+m)\left(x-\frac{la+mb}{l+m}\right)^2+\frac{lm}{l+m}(b-a)^2$$

$$l(x-a)^2+m(x-b)^2+n(x-c)^2=(l+m+n)x^2-2(la+mb+nc)x+la^2+mb^2+nc^2$$

$$=(l+m+n)\left(x-\frac{la+mb+nc}{l+m+n}\right)^2+\frac{lm}{l+m+n}(b-a)^2+\frac{mn}{l+m+n}(c-b)^2+\frac{nl}{l+m+n}(a-c)^2$$

これらを一般化して、

$$\sum_{k=1}^{N}m_k(x-a_k)^2=M\left(x-\frac{\sum_{k=1}^{N}m_ka_k}{M}\right)^2+\sum_{i<j\le N}\frac{m_im_j}{M}(a_i-a_j)^2 \quad ただし M=\sum_{k=1}^{N}m_k$$

という恒等式をつくることができます。

この恒等式は、1 本の直線の上に並んだ原子からなる分子について、慣性モーメントという量を求める計算から出てきたものです。また、確率、統計学の分散の計算でもこの恒等式が出現します。

この恒等式から、これまでと同様に

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\,|\vec{x}-\overrightarrow{a_k}|^2=M\left|\vec{x}-\frac{\sum_{k=1}^{N}m_k\overrightarrow{a_k}}{M}\right|^2+\sum_{i<j\le N}\frac{m_im_j}{M}|\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{a_j}|^2$$

とかきかえる

$O(\vec{0}),P(\vec{x}),A_k(\overrightarrow{a_k})(k=1,2,\cdots,N)$ とし各点 A_k にそれぞれ、質量 m_k の質点を置いたときの質量中心（物理的重心）を G とすると、

$$\sum_{k=1}^{N}m_kPA_k{}^2=M\cdot PG^2+\sum_{i<j\le N}\frac{m_im_j}{M}A_iA_j{}^2 \quad \cdots \quad （♯1）$$

特に $m_1=m_2=\cdots=m_N=1$ のとき（♯1）は

$$\sum_{k=1}^{N}PA_k{}^2=N\cdot PG^2+\frac{1}{N}\sum_{i<j\le N}A_iA_j{}^2 \quad \cdots \quad （♯2）$$

となります。

例 4.　（札幌医科大学 2005 年前期入試問題より抜粋）

1　中心が原点 O である半径 1 の球上に，四点 A_1，A_2，A_3，A_4 を四面体の頂点となるようにとる。この四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の各辺 A_iA_j の中点を A_{ij} とする。ただし，i，$j=1$，2，3，4，$i<j$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　三つの線分 $A_{12}A_{34}$，$A_{14}A_{23}$，$A_{13}A_{24}$ は一点 G で交わることを示せ。

(2)　(1)の点 G に関する点 O の対称点を M とする。また，四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の頂点 A_i を除いた三つの頂点でできる三角形の重心を K_i（$i=1$，2，3，4）とする。このとき，

$$\sum_{i=1}^{4}|\overrightarrow{MK_i}|^2+\frac{2}{9}L$$

の値を求めよ。ただし，L は四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の各辺の長さの 2 乗の和とする。

（＃２）を使ってこの問題の（2）を解いてみよう。

（＃２）により

$$\sum_{k=1}^{4}OA_k{}^2=4OG^2+\frac{1}{4}\sum_{i<j\le 4}A_iA_j{}^2 \quad \cdots \quad ①$$

$$\sum_{k=1}^{4}MA_k{}^2=4MG^2+\frac{1}{4}\sum_{i<j\le 4}A_iA_j{}^2 \quad \cdots \quad ②$$

与えられた条件より、$MG=OG$ が成り立つので①②の右辺は等しく

$$\sum_{k=1}^{4}MA_k{}^2=\sum_{k=1}^{4}OA_k{}^2=4 \quad \cdots \quad ③$$

とわかる。

また、3 点 A_1,A_2,A_3 について（＃２）を使うことによって、

$$\sum_{k=1}^{3}MA_k{}^2=3MK_4{}^2+\frac{1}{3}\sum_{i<j\le 3}A_iA_j{}^2$$

具体的に書くと

$$MA_1{}^2+MA_2{}^2+MA_3{}^2=3MK_4{}^2+\frac{1}{3}(A_1A_2{}^2+A_2A_3{}^2+A_3A_1{}^2) \quad \cdots \quad ④$$

同様に

$$MA_2{}^2+MA_3{}^2+MA_4{}^2=3MK_1{}^2+\frac{1}{3}(A_2A_3{}^2+A_3A_4{}^2+A_4A_2{}^2) \quad \cdots \quad ⑤$$

$$MA_1{}^2+MA_3{}^2+MA_4{}^2=3MK_2{}^2+\frac{1}{3}(A_1A_3{}^2+A_3A_4{}^2+A_4A_1{}^2) \quad \cdots \quad ⑥$$

$$MA_1{}^2+MA_2{}^2+MA_4{}^2=3MK_3{}^2+\frac{1}{3}(A_1A_2{}^2+A_2A_4{}^2+A_4A_1{}^2) \quad \cdots \quad ⑦$$

④+⑤+⑥+⑦より

$$3\sum_{k=1}^{4} MA_k{}^2 = 3\sum_{k=1}^{4} MK_k{}^2 + \frac{2}{3}\sum_{i<j} A_iA_j{}^2$$

③より左辺＝12　が成り立ち、右辺の $\sum_{i<j\le 4} A_iA_j{}^2$ は L に等しい

$$\therefore \quad 12 = 3\sum_{k=1}^{4} MK_k{}^2 + \frac{2}{3}L$$

この式を 3 で割って

$\sum_{k=1}^{4} MK_k{}^2 + \frac{2}{9}L = 4$　が得られる。

（物理では慣性モーメントの便利な計算方法があるのでそれを利用すればもっと早く計算できる）

さて、このような恒等式は簡単につくることができて、

$(la+mb)^2 + (ma-lb)^2 = (l^2+m^2)(a^2+b^2)$

$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 - a^2 - b^2 - c^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

など、それぞれに幾何学の公式が結びついている。

（＃１）（＃２）は大学 1 年のときに、ランダウ＝リフシッツの有名な力学の教科書の練習問題を計算していて思いついたもので、それ以来 30 年以上たっているが、これまでいろいろな分野で役に立った。

例 4.　（＃１）を利用して、作った図形公式の例をひとつあげよう

三角形 ABC の内心を I とすると、I は 3 点 A,B,C にそれぞれ、質量 a,b,c の質点を配置したときの、質量中心に一致するから、（＃１）で $P=G=I$ として

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$$

が成り立つ。ただし、$a=BC, b=CA, c=AB$ とする。

（＃1）で　$N=2$　の場合は、スチュワートの定理と呼ばれるものと一致する。

（＃１）で、質量の連続分布を考えても面白い（積分表現が可能だ)。いろいろな拡張が可能だ。