2項間漸化式の新しい見方

遺愛女子中学高等学校　西谷　優一

1．二項間漸化式の標準的解法

二項間漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

の解法をどのように教えていますか。
まず、参考書で多く見られる解法を眺めてみることにします。

例題.
$$\begin{cases} a_1 = a & \cdots\cdots\cdots ① \\ a_{n+1} = pa_n + q & \cdots\cdots\cdots ② \quad (\mathrm{p} \neq 1) \end{cases}$$
を解け。

（解 1）　$\alpha = p\alpha + q$　$\cdots\cdots\cdots$③

をみたすαを求めて、$\alpha = \dfrac{q}{1-p}$ を得る。また、②－③より、

$$a_{n+1} - \alpha = p\,(a_n - \alpha)$$

$\therefore\ \{a_n - \alpha\}$ は公比 p の等比数列。

したがって

$$\begin{aligned} a_n - \alpha &= (a_1 - \alpha)\cdot p^{n-1} \\ a_n &= \alpha + (a_1 - \alpha)\cdot p^{n-1} \\ &= \frac{q}{1-p} + \left(a - \frac{q}{1-p}\right)\cdot p^{n-1} \end{aligned}$$

(解 1 の注)
ほとんどの参考書でこの解法がとられています。授業でも、この解法で教えている先生が多いのではないかと思われます。これはこれで立派な解法なのですが、問題は式③の由来です。これについては $y = px + q$ と $y = x$ のグラフを用いて説明しているものもありますが、そんな大掛かりなことをする必要があるか疑問です。数学の得意な生徒にとって、数列と図形という、一見まったく別のものが結びついて、ぞくぞくするくらい面白い所なのですが、大部分の生徒にとっては荷が重いようです。

また、階差数列を用いた次のような解法も基本的です。

（解２）

$$\begin{cases} a_1 = a & \cdots\cdots\cdots ① \\ a_{n+1} = pa_n + q & \cdots\cdots\cdots ② \quad (\mathrm{p} \neq 1) \end{cases}$$

②より $a_{n+2} = pa_{n+1} + q$ だから、これから①を辺々引いて

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2} = pa_{n+1} + q \\ -) & \underline{a_{n+1} = pa_n + q} \\ & a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n) \quad \cdots\cdots\cdots ③ \end{array}$$

$\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ は公比 p の等比数列。

$$a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)\,p^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

$\begin{aligned} a_2 &= pa_1 + q \\ &= pa + q \end{aligned}$ と②をこの式に代入して、

$$\left(pa_n + q\right) - a_n = \{(p-1)a + q\} \cdot p^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$(p-1)a_n = \{p-1)a + q\} \cdot p^{n-1} - q$$

$$a_n = \left(1 + \frac{q}{p-1}\right) \cdot p^{n-1} - \frac{q}{p-1}$$

（解２の注）

参考書の作者たちの多くは、（そして我々教師も）④の形を見るとすぐ階差数列の公式

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots\cdots + (a_n - a_{n-1}) \ (n \geq 2)$$

を利用しようとしますが、⑤のようにやればよいのです。「$n = 1$ の場合と $n \geq 2$ の場合に分けて Σ を使って計算」という手間は要りません。

2.　二項間漸化式と不動点（現象論的理解）

さて、例題の（解 1）に現れる等式　$\alpha = p\alpha + q$　$\cdots\cdots\cdots$③　の由来をもっと生徒が納得できるような説明の仕方はないだろうか。

このことについて、以下のような授業を考えてみた。

想定される授業前の状態としては、上にあげた標準的な解法を学んだあとで、イメージがつかみ切れない生徒が多い、そんな教室である。

問　　漸化式 $a_{n+1}=3a_n-4$ をみたす数列 $\{a_n\}$ において、初項 a_1 が次のように与えられているとき、a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 の値を順に求めよ。 （１）$a_1=0$　（２）$a_1=1$　（３）$a_1=2$　（４）$a_1=3$　（５）$a_1=4$

≪解≫

（１）	（２）	（３）	（４）	（５）
$a_1=0$	$a_1=1$	$a_1=2$	$a_1=3$	$a_1=4$
$a_2=-4$	$a_2=-1$	$a_2=2$	$a_2=5$	$a_2=8$
$a_3=-16$	$a_3=-7$	$a_3=2$	$a_3=11$	$a_3=20$
$a_4=-52$	$a_4=-25$	$a_4=2$	$a_4=29$	$a_4=56$
$a_5=-160$	$a_5=-79$	$a_5=2$	$a_5=83$	$a_5=164$

ところで、（1）～（5）で $\{a_n\}$ の一般項を求めることはできますか。

実は、これがびっくりするほど簡単に（しかもほとんど暗算で）できてしまうのです。今日はそんなお話をします。

さて、（1）～（5）の中でひとつだけ目を引くものがありますね。ひとつだけほかと違っているもの、それは（3）ですね。

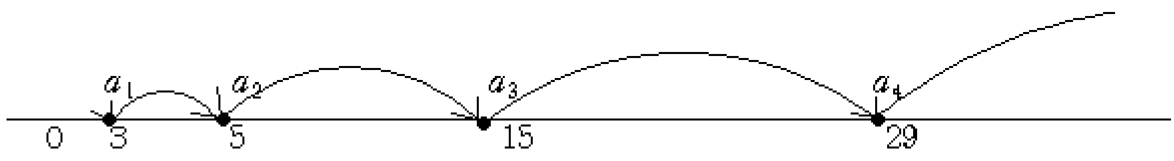
漸化式 $a_{n+1}=3a_n-4$ において、$a_1=2$ とすると、

$$a_2=3\times 2-4=2 \qquad a_3=3\times 2-4=2 \quad \cdots\cdots\cdots$$

と永遠に同じ値が続いてしまいます。このことを「漸化式 $a_{n+1}=3a_n-4$ は不動点 2 を持つ」と言うことにします。

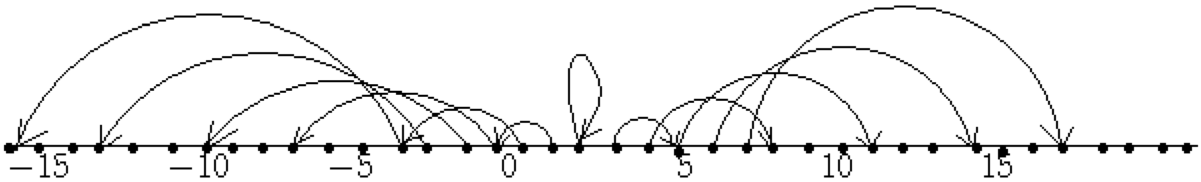
「不動点」つまり動かない「点」を持つという言い方は、漸化式の問題を数直線上の点の移動として捉えているということです。

たとえば、問１（4）では $a_1=3\to a_2=5\to a_3=15\to a_4=29$ だから、



n が１，２，３，４，・・・と変わるとき、それとともに、a_n を表す点が数直線上を移動する現象として数列をとらえているわけです。

漸化式 $a_{n+1}=3a_n-4$ によって a_n が a_{n+1} に移る様子を



↑
不動点

このように表して調べることができます。

$a_n=2$ のとき、$a_{n+1}=3a_n-4=2$　となり、a_{n+1} は a_n と同じ値になります。これが不動点です。

さて、

不動点を求めるにはどうすればよいかわかりますか？

$$a_{n+1}=3a_n-4$$

だったら、$a_{n+1}=a_n=\alpha$ として（a_n と a_{n+1} が同じ値 α になる）

$$\alpha=3\alpha-4$$

を解けばよいのです。

これを解いて $\alpha=2$　　これが不動点です。

漸化式が不動点を持つとき、しばしば次のように考えると、漸化式の表す現象が見えてきます。

> a_1 の値が不動点に一致しているときには値は動かないが、a_1 の値が不動点から「ズレている」時は、それ以降の値も不動点からずれることになる。そのズレの規則性に注目すると、簡単な規則性が見えてくることが多い。

それでは問の解答を「不動点２からのズレの変化」に着目して書きなおしてみましょう。

（1）

$a_1=2\underline{\underline{-2}}$

$a_2=2\underline{\underline{-6}}$

$a_3=2\underline{\underline{-18}}$

$a_4=2\underline{\underline{-54}}$

$a_5=2\underline{\underline{-162}}$

………

$a_n=2\underline{\underline{-2\cdot 3^{n-1}}}$

（2）

$a_1=2\underline{\underline{-1}}$

$a_2=2\underline{\underline{-3}}$

$a_3=2\underline{\underline{-9}}$

$a_4=2\underline{\underline{-27}}$

$a_5=2\underline{\underline{-81}}$

………

$a_n=2\underline{\underline{-1\cdot 3^{n-1}}}$

$\quad=2\underline{\underline{-3^{n-1}}}$

（4）

$a_1=2\underline{\underline{+1}}$

$a_2=2\underline{\underline{+3}}$

$a_3=2\underline{\underline{+9}}$

$a_4=2\underline{\underline{+27}}$

$a_5=2\underline{\underline{+81}}$

………

$a_n=2\underline{\underline{+1\cdot 3^{n-1}}}$

$\quad=2\underline{\underline{+3^{n-1}}}$

（5）

$a_1=2\underline{\underline{+2}}$

$a_2=2\underline{\underline{+6}}$

$a_3=2\underline{\underline{+18}}$

$a_4=2\underline{\underline{+54}}$

$a_5=2\underline{\underline{+162}}$

………

$a_n=2\underline{\underline{+2\cdot 3^{n-1}}}$

> $\underline{\underline{\qquad}}$ 部分は公比 3 の等比数列の形になっているから。

$\boxed{}$の部分は観察による推測でしかありませんから、漸化式に根拠を求めることにします。

漸化式$a_{n+1}=3a_n-4$で$a_n=2+\underline{\underline{b_n}}$とおいてやると、

$$2+b_{n+1}=3(2+b_n)-4$$
$$\therefore\ b_{n+1}=3b_n$$

このようにやって$\underline{\underline{}}$の部分は公比３の等比数列であることを導くことが必要です。

あるいは前にやったように

$$a_{n+1}=3a_n-4\quad\cdots\cdots\cdots①$$
$$\alpha=3\alpha-4\quad\cdots\cdots\cdots②$$

①、②より

$$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$$

②より　α＝２だから、

$$a_{n+1}-2=3(a_n-2)$$

このようにして、「不動点からのズレ」$\{a_n-2\}$が公比３の等比数列になることを導いても同じことです。

以上の考察から漸化式$a_{n+1}=pa_n+q$の一般項は

$a_n=$（不動点）＋（公比pの等比数列）

の形になります。

このことを知っていると、一般項を暗算で求めることができます。

$$\alpha=p\alpha+q$$

を解いて不動点αを求めたら、a_1を

$$a_1=\alpha+\underline{\underline{(a_1-\alpha)}}$$

と変形します。この、$\underline{\underline{}}$の部分がnの変化に応じて、公比pの等比数列に「変身」して

$$a_n=\alpha+(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}$$

となる。

このようにやればよいのです。

それでは、ちょっと練習してみましょう。

例題　次の漸化式をみたす数列$\{a_n\}$の一般項を暗算で求めよ。

（１）$a_1 = 2$

$a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + 1$

（２）$a_0 = 5$

$a_{n+1} = 2a_n - 3$

≪解≫

（１）$\alpha = \frac{2}{3}\alpha + 1$を解いて、$\alpha = 3$

$$a_1 = 3 + \underline{\underline{(-1)}}$$

$\Downarrow$ (項番号が $n-1$ 増えた)

$$\therefore\ a_n = 3 \underline{\underline{-1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}} = 3 \underline{\underline{-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}}$$

（２）$\alpha = 2\alpha - 3$を解いて、$\alpha = 3$

$$a_0 = 3 + \underline{\underline{2}}$$

$\Downarrow$ (項番号がn増えた)

$$\therefore\ a_n = 3 + \underline{\underline{2 \cdot 2^n}} = 3 + \underline{\underline{2^{n+1}}}$$

※（２）のように、a_1ではなくa_0が初項として与えられることもしばしばあります。

どうです、簡単でしょ！

生徒のいだく「WHY？」の疑問に対して、いくら説明してもなかなか理解してもらえないことがよくありますが、「WHAT」のほうが大切な場合もあります。