たかが因数分解、されど因数分解

数実研会員　村田　洋一

１．はじめに

高校数学を学ぶに当たり、因数分解の必要によく迫られる。
式と計算の分野は言うに及ばず方程式や不等式の解法、等式や不等式の証明など枚挙に暇がない。数学 I で勉強する共通因数の括り出し、因数定理による因数の探索、一文字や最低次の文字について整理、公式の直接利用などだけでは対応できない例を考え、あるいは探して自分なりのやり方で解いてみた。

式の展開は基本中の基本で一般に時間さえかければできるが、因数分解は微分に対する積分と同様で、そう簡単にはいかない。

他にもいろいろな問題が考えられるが、独断と偏見で 10 題取り上げたもので、ご参考になれば幸いである。

２．いろいろな因数分解

（問　題）

次の各式を整係数の範囲で因数分解せよ。

(1)　$2a^3+2b^3+2c^3-5a^2b+ab^2-5b^2c+bc^2-5c^2a+ca^2-2abc$

(2)　$x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+1$

(3)　$x^{11}+x^7+1$

(4)　$3x^4-6x^3+7x^2-4x+1$

(5)　$x^7+y^7-(x+y)^7$

(6)　$(a+b)^5-a^5-b^5$　・・・①

また、①を利用して　$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$　・・・②、

②を利用して次の③を各々因数分解せよ。

$(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$　・・・③

(7)　$6(a+b+c)^3+(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+54abc$

(8)　$a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$

(9)　$(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4+(b-c)(b+c)^4$

(10)　$(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$
$\qquad -2(a-b)^3(a-c)^3-2(b-c)^3(b-a)^3-2(c-a)^3(c-b)^3$

（解　答）

(1) 共通因数や対称性もなく方針も見つからないため、一つの文字 例えばa について整理してみると定数項が因数分解できる。

与式$=2a^3-(5b-c)a^2+(b^2-2bc-5c^2)a+2b^3-5b^2c+bc^2+2c^3$

$=2a^3-(5b-c)a^2+(b^2-2bc-5c^2)a+(b-c)(2b+c)(b-2c)$

ここで上の式をa の関数として $\pm(2b+c),\pm(b-2c),\pm\dfrac{b-c}{2}$ などの因数の候補を代入してみる。

$f(b-c), f(-b+c)$ とも 0 にならないが

$$f(b-2c)=(b-2c)\{2(b-2c)^2-(5b-c)(b-2c)+b^2-2bc-5c^2+(b-c)(2b+c)\}=0$$

$$f(2b+c)=(2b+c)\{2(2b+c)^2-(5b-c)(2b+c)+b^2-2bc-5c^2+(b-c)(b-2c)\}=0$$

よって $f(a)$ は$a-2b-c$ 、$a-b+2c$ なる因数を持つ。

組立除法により

$2b+c$	2	$-5b+c$	$b^2-2bc-5c^2$	$2b^3-5b^2c+bc^2+2c^3$
		$4b+2c$	$-2b^2+5bc+3c^2$	$-2b^3+5b^2c-bc^2-2c^3$
	2	$-b+3c$	$-b^2+3bc-2c^2$	0

これから 商は $2a^2+(-b+3c)a-(b-c)(b-2c)$

たすき掛けにより

2	$b-c$	$b-c$
1	$-b+2c$	$-2b+4c$
		$-b+3c$

与式$=(a-2b-c)(a-b+2c)(2a+b-c)=-(2a+b-c)(2b+c-a)(2c+a-b)$（答）

(2) $x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+1$

与式＝0 と置くと 6 次の相反方程式である。

$x^3(\neq 0)$ で割って $(x^3+\dfrac{1}{x^3})-3(x^2+\dfrac{1}{x^2})+2(x+\dfrac{1}{x})-3=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ と 置いて整理すると $t^3-3t^2-t+3=0$

因数分解して $(t+1)(t-1)(t-3)=0$ $(x+\dfrac{1}{x}+1)(x+\dfrac{1}{x}-1)(x+\dfrac{1}{x}-3)=0$

従って $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-3x+1)=0$

x^6 の係数は 1 であるから

与式$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$ （答）

(3)　$x^{11}+x^7+1$

与式を $f(x)$ とする。　$f(1)=3,\ f(-1)=-1$　より、因数分解できるとすると

因数は二次式で　x^{11}　の係数と定数項は 1 だから

$$x^{11}+x^7+1=(x^2+ax+1)(x^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3+hx^2+ix+1)$$

$$=x^{11}+(a+b)x^{10}+(c+ab+1)x^9+(d+ac+b)x^8+(e+ad+c)x^7+(f+ae+d)x^6$$
$$+(g+af+e)x^5+(h+ag+f)x^4+(i+ah+g)x^3+(1+ai+h)x^2+(a+i)x+1$$

・・・・(A)

未定係数法により係数比較して

$a+b=0$　から　$b=-a,$　　$a+i=0$　から　$i=-a,$

各々次の項、前の項に代入していくと

$c=a^2-1,\quad d=-a^3+2a,\quad e=a^4-3a^2+2$

$h=a^2-1,\quad g=-a^3+2a,\quad f=a^4-3a^2+1$

（A）式にこれらを代入して 1,5,12 項は消え、右辺の 2～4 項、8～11 項は恒等式に 0 で、恒等的に 0 とならない係数 6，7 項はそのまま残して

$0=(f+ae+d)x^6+(g+af+e)x^5$　・・・・(B)　となり、各係数＝0 から

$$f+ae+d=a^5+a^4-4a^3-3a^2+4a+1=(a-1)(a^4+2a^3-2a^2-5a-1)=0$$

・・・・(C)

$$g+af+e=a^5+a^4-4a^3-3a^2+3a+2=(a-1)(a+1)(a+2)(a^2-a-1)=0$$

・・・・(D)

これら (C),(D) 2 式の共通解は　$a=1$

従って、与式は次のように一意的に因数分解される。

与式＝$(x^2+x+1)(x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$　　(答)

別解)

$\omega^3=1$　より　$\omega^2+\omega+1=0$　与式に ω を代入して

$(\omega^3)^3\cdot\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

与式は　x^2+x+1　なる因数を持つから割り算を実行して、商は

$x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1$

従って　　$(x^2+x+1)(x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$　と因数分解される。

注）第 2 項は既約と思うが判定できない。: アイゼンシュタインの既約判定法など

(4)　$3x^4-6x^3+7x^2-4x+1$

与式＝0 と置いて 4 次方程式を解く要領で　$x=y+\frac{1}{2}$　と変換し

$$(y+\frac{1}{2})^4-2(y+\frac{1}{2})^3+\frac{7}{3}(y+\frac{1}{2})^2-\frac{4}{3}(y+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}=0$$

これを整理して　$y^4+\frac{5}{6}y^2+\frac{1}{16}=0$　　$\therefore$　$48y^4+40y^2+3=0$

$y^2=\frac{-20\pm\sqrt{256}}{48}=\frac{-5\pm4}{12}$　　$y^2=-\frac{1}{12},-\frac{3}{4}$ から　$(x-\frac{1}{2})^2=-\frac{1}{12},-\frac{3}{4}$

前者より　$3x^2-3x+1=0$　　後者より　$x^2-x+1=0$

各々の判別式 $D_1=-3, D_2=-3$ より、実数の範囲ではこれ以上因数分解できない。

これら二式の積を見ると x^4 の係数は 3、x^2 の係数は 1 であるから

与式 $=3x^4-6x^3+7x^2-4x+1=(3x^2-3x+1)(x^2-x+1)$　　（答）

別解）

与式を $f(x)$ とする。整数係数の因数を持てば、$f(x)=0$　において

$f(\pm1)$, $f(\pm\frac{1}{3})$ のいずれもが 0 でないから、一次でなく二次の因数を持つ。

x^4 の係数は 3、x^2 の係数は 1 であり、次のように置き 未定係数法で a,b を決めるとよい。

$3x^4-6x^3+7x^2-4x+1=(3x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$

または　$(3x^2+ax-1)(x^2+bx-1)$

右辺を展開・整理して

$=3x^4+(a+3b)x^3+(\pm4+ab)x^2\pm(a+b)x+1$

係数比較して

$a+3b=-6$,　$\pm4+ab=7$,　$\pm(a+b)=-4$　　（複号同順）

これを解いて 複号が＋ の $a=-3, b=-1$ のみが 3 本の方程式を満足し適する。

従って次の答を得る。

$3x^4-6x^3+7x^2-4x+1=(3x^2-3x+1)(x^2-x+1)$　　（答）

(5)　$x^7+y^7-(x+y)^7$　　　第 3 項を二項定理で展開して

$=x^7+y^7-(x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7)$

$=-7xy\{(x^5+y^5)+3xy(x^3+y^3)+5x^2y^2(x+y)\}$

$=-7xy(x+y)(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)$

$=-7xy(x+y)\{x^2(x^2+xy+y^2)+xy(x^2+xy+y^2)+y^2(x^2+xy+y^2)\}$

$=-7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$　　（答）

注）$\frac{x}{y}=t$ と置いて(2)のように解くと $(t+\frac{1}{t}+1)^2=0$ から $(x^2+xy+y^2)^2$ が出てくる。

また　$x^7+y^7=(x+y)\,(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$ として

$(x+y)^7$　を二項定理で 展開するも可。

(6)　$(a+b)^5-a^5-b^5$　・・・①

また、①を利用して　$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$　・・・②

②を利用して次の③を因数分解せよ。

$(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$ ・・・③

①は二項定理で展開して　与式$=5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4$

$=5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$　(答)

②で$P=(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$　と置く。①の結果より

$P=(a+b)^5+5(a+b)^4c+10(a+b)^3c^2+10(a+b)^2c^3+5(a+b)c^4$

$+c^5-a^5-b^5-c^5$　　ここで再度を前半の結果を利用して

$=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)+5(a+b)^4c+10(a+b)^3c^2+10(a+b)^2c^3$

$+5(a+b)c^4=5(a+b)\{ab(a^2+ab+b^2)+(a+b)^3c$

$+2(a+b)^2c^2\ +2(a+b)c^3+c^4\}$

P で　$c=-a$ と置くと $P=0$　で、同様にして　P は $c+a$,　$a+b$, $b+c$ の因数を持つ。

また P は 5 の倍数であることは明らか。

$c=-a$　で組立除法を行うと　$c^3, c^2, c,$ 定数項の係数は各々　1, $a+2b$,

$a^2+2ab+2b^2$, $a^2b+ab^2+b^3$　　同様にして　$c=-b$ で組立除法を行うと

$c^2, c,$ 定数項の係数は各々　1,　$a+b$,　a^2+ab+b^2 となる。

$c^2+(a+b)c+a^2+ab+b^2=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$　より

$P=5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$　(答)

③で　$x=b+c-a,\ y=c+a-b,\quad z=a+b-c$　と置くと

$x+y+z=a+b+c$

この変換で③は　$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$ ・・・④　となる。

④から ③は

$$=5\cdot2c\cdot2a\cdot2b\cdot\frac{1}{2}\{(2c)^2+(2a)^2+(2b)^2\}=80abc(a^2+b^2+c^2)\ (答)$$

(7)　$6(a+b+c)^3+(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+54abc$

式の形から　$a+b-2c=x, b+c-2a=y, c+a-2b=z$　と置くと

$x+y+z=0$　で、第 2 項から第 4 項の和を先に計算する。

$x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}+3xyz$

$=3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$

これを a について展開・整理すると

$=-3\{(a+(b-2c)\}\{2a-(b+c)\}\{a+(c-2b)\}=-3\{2a^3-3(b+c)a^2$

$+((c-2b)(b-5c)-(b+c)(b-2c))a+(2b-c)(b-2c)(b+c)\}$

$=-3\{2a^3-3(b+c)a^2-3(b^2-4bc+c^2)a+(2b^3-3b^2c-3bc^2+2c^3)\}$ ・・・①

一方　$6\{(a+(b+c)\}^3=6\{a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3\}$

$=6\{a^3+3(b+c)a^2+3(b^2+2bc+c^2)a+(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)\}$ ・・・②

①、② と $54abc$ を辺々加えて

与式$=27(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc)$

(　　) 内は a について整理して

$(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=(a+b)(b+c)(c+a)$

これから　与式$=27(a+b)(b+c)(c+a)$　　(答)

(注)　与式を $f(a,b,c)$ と置くと $f(a,b,c)=f(b,c,a)$ で a,b,c の 3 次の輪環式、$f(a,-a,c)=0$ 等より $f(a,b,c)=k(a+b)(b+c)(c+a)$ と書け、(8)～(10)の方法では簡単に解けます。

(8)　$a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$

与式を $f(a,b,c)$ と置き $f(b,c,a)$ を作ると $f(a,b,c)=f(b,c,a)$

従って $f(a,b,c)$ は a,b,c についての 5 次の輪換式となる。

$f(b,b,c)=2b^3(b+c)(b-c)+2b^3(b+c)(c-b)=0$ などから

$f(a,b,c)$ は $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数に持つから 2 次の斉次輪環式を加えて

$f(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)\{m(a^2+b^2+c^2)+n(ab+bc+ca)\}$ と書ける。

恒等式であるからこの式に $a=1,b=2,c=3$ を代入して

$1\cdot3\cdot4\cdot(-1)+4\cdot5\cdot3\cdot1+9\cdot4\cdot5\cdot(-1)=(-1)\cdot(-1)\cdot2\{m(1^2+2^2+3^2)+n(2+6+3)\}$

これを整理して　$14m+11n=-36$ ・・・①

同様に $a=0,b=1,c=2$ とし $5m+2n=-9$ ・・・②

① ②を解いて　$m=-1,n=-2$

以上のことから　与式$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2$　(答)

(注)　与式を一文字、例えば a についての 4 次式に整理し、

$(b-c)\{a^4+(b+c)a^3-(b^2+bc+c^2)a^2-b(b+c)(b^2+c^2)+bc(b+c)(b^2+c^2)\}$

として b,c での 2 回の組立除法を行い

$a^2+2(b+c)a+(b+c)^2=(a+b+c)^2$ を 算出しても良い。

(9) $(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4+(b-c)(b+c)^4$

与式を $f(a,b,c)$ と置く。

$f(b,c,a)=(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4+(b-c)(b+c)^4=f(a,b,c)$

これから　$f(a,b,c)$　は a,b,c の 5 次の輪換式

$f(b,b,c)=(b-c)(b+c)^4+(c-b)(c+b)^4=0$

同様に　$f(a,c,c)=0,\quad f(a,c,a)=0$　から 2 次の斉次輪環式を加え

$f(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)\{m(a^2+b^2+c^2)+n(ab+bc+ca)\}$　と書ける。

但し　m,n　は整数。

$a=-1,b=0,c=1$　の時　　$2m-n=-1$　・・・①

$a=-1,b=0,c=2$　の時　　$5m-2n=-5$　・・・②

①、②より　　$m=-3,n=-5$

与式＝$-(a-b)(b-c)(c-a)(3a^2+3b^2+3c^2+5ab+5bc+5ca)$　（答）

(10) $(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$

$-2(a-b)^3(a-c)^3-2(b-c)^3(b-a)^3-2(c-a)^3(c-b)^3$

与式を $f(a,b,c)$ と置く。

$f(b,c,a)=f(a,b,c)$ で 6 次の輪環式である。

$a=b$ の時　$(b-c)^6+(c-b)^6-2(c-b)^6=0$

$a=0$ の時　$(b-c)^6+c^6+b^6-9b^2c^2(b-c)^2-2b^3c^3-2b^3(b-c)^3-2c^3(c-b)^3$

$=(b-c)^3\{(b^3-3b^2c+3bc^2+c^3)-2b^3+2c^3\}-9b^2c^2(b-c)^2+(b^3-c^3)^2$

$=(b-c)^3\{(c^3-b^3)+(3bc^2-3b^2c)\}-9b^2c^2(b-c)^2+(b-c)^2(b^2+bc+c^2)^2$

$=(b-c)^3\{(c-b)(c^2+bc+b^2)+3bc(c-b)\}+(b-c)^2\{(b^2+bc+c^2)^2-(3bc)^2\}$

$=-(b-c)^4(c^2+4bc+b^2)+(b-c)^2(b^2+4bc+c^2)(b-c)^2\}$

$=-(b-c)^4(c^2+4bc+b^2)+(b-c)^4(b^2+4bc+c^2)=0$

よって　$f(a,b,c)=kabc(a-b)(b-c)(c-a)$　と書けるから

$a=3,b=2,c=1$ として

$1+2^6+1-9\cdot2^2-2\cdot2^3-2\cdot(-1)-2\cdot(-2)^3\cdot(-1)=-12k$

$-12k=0$　　従って　$k=0$　　　　与式＝0　（答）

（注）a,b,c の因数を見つけるのが難しく、その場合は面倒な計算になりますが

3 次の斉次輪環式を加えて

$f(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)\{l(a^3+b^3+c^3)+m(a^2b+b^2c+c^2a)$

$+n(ab^2+bc^2+ca^2)+kabc\}$　として

$a=3,b=2,c=1$ のとき　　$36l+25m+23n+6k=0$　・・・①

$a=1,b=2,c=-1$ のとき　　$8l-m+5n-2k=0$　・・・②

そろそろ答が見えかけてきたが

$a=2, b=-2, c=1$ のとき　$l-2m+10n-4k=0$　・・・③

$a=2, b=-2, c=3$ のとき　$27l+22m+2n-12k=0$　・・・④

①～④を満たすのは $(l,m,n,k)=(0,0,0,0)$ しかありえない。従って 与式＝0

レポート発表終了後、中村文則先生から下記別解のご指摘があったので紹介する。

(別解)

$A=b-c$，　$B=c-a$，　$C=a-b$ とおく。　$(A+B+C=0)$

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= A^6+B^6+C^6-9C^2A^2B^2+2C^3B^3+2A^3C^3+2B^3A^3 \\
&= (A^3+B^3+C^3)^2-(3ABC)^2 \\
&= (A^3+B^3+C^3-3ABC)(A^3+B^3+C^3+3ABC) \\
&= (A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)(A^3+B^3+C^3+3ABC) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以　上

参考資料

九章出版社(台北市)　「因式分解」技巧　問題（5）, (6)―③, (8) , (9)は
演習問題（答のみ掲載）より借用、解答は小生作成;
（10）はおもしろく例題を転載、紹介したもの。

東京図書出版会　「私の数学散歩道」拙著より　問題(4), (6)―①, ②

その他は自作問題