

たかが因数分解、されど因数分解

数実研会員 村田 洋一

1. はじめに

高校数学を学ぶに当たり、因数分解の必要によく迫られる。

式と計算の分野は言うに及ばず方程式や不等式の解法、等式や不等式の証明など枚挙に暇がない。数学 I で勉強する共通因数の括り出し、因数定理による因数の探索、一文字や最低次の文字について整理、公式の直接利用などだけでは対応できない例を考え、あるいは探して自分なりのやり方で解いてみた。

式の展開は基本中の基本で一般に時間さえかければできるが、因数分解は微分に対する積分と同様で、そう簡単にはいかない。

他にもいろいろな問題が考えられるが、独断と偏見で 10 題取り上げたもので、ご参考になれば幸いである。

2. いろいろな因数分解

(問 題)

次の各式を整係数の範囲で因数分解せよ。

$$(1) \quad 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - 5a^2b + ab^2 - 5b^2c + bc^2 - 5c^2a + ca^2 - 2abc$$

$$(2) \quad x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

$$(3) \quad x^{11} + x^7 + 1$$

$$(4) \quad 3x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 1$$

$$(5) \quad x^7 + y^7 - (x+y)^7$$

$$(6) \quad (a+b)^5 - a^5 - b^5 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、①を利用して $(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 \quad \dots \textcircled{2}$ 、

②を利用して次の③を各々因数分解せよ。

$$(a+b+c)^5 - (b+c-a)^5 - (c+a-b)^5 - (a+b-c)^5 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(7) \quad 6(a+b+c)^3 + (a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3 + 54abc$$

$$(8) \quad a^2(a+b)(a+c)(b-c) + b^2(b+c)(b+a)(c-a) + c^2(c+a)(c+b)(a-b)$$

$$(9) \quad (c-a)(c+a)^4 + (a-b)(a+b)^4 + (b-c)(b+c)^4$$

$$(10) \quad (b-c)^6 + (c-a)^6 + (a-b)^6 - 9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \\ - 2(a-b)^3(a-c)^3 - 2(b-c)^3(b-a)^3 - 2(c-a)^3(c-b)^3$$

(解 答)

(1) 共通因数や対称性もなく方針も見つからないため、一つの文字 例えば a について整理してみると定数項が因数分解できる。

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 2a^3 - (5b-c)a^2 + (b^2 - 2bc - 5c^2)a + 2b^3 - 5b^2c + bc^2 + 2c^3 \\ &= 2a^3 - (5b-c)a^2 + (b^2 - 2bc - 5c^2)a + (b-c)(2b+c)(b-2c) \end{aligned}$$

ここで上の式を a の関数として $\pm(2b+c), \pm(b-2c), \pm\frac{b-c}{2}$ などの

因数の候補を代入してみる。

$f(b-c), f(-b+c)$ とも 0 にならないが

$$\begin{aligned} f(b-2c) &= (b-2c)\{2(b-2c)^2 - (5b-c)(b-2c) + b^2 - 2bc - 5c^2 \\ &\quad + (b-c)(2b+c)\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2b+c) &= (2b+c)\{2(2b+c)^2 - (5b-c)(2b+c) + b^2 - 2bc - 5c^2 \\ &\quad + (b-c)(b-2c)\} = 0 \end{aligned}$$

よって $f(a)$ は $a-2b-c$ 、 $a-b+2c$ なる因数を持つ。

組立除法により

$2b+c$	2	$-5b+c$	$b^2 - 2bc - 5c^2$	$2b^3 - 5b^2c + bc^2 + 2c^3$
		$4b+2c$	$-2b^2 + 5bc + 3c^2$	$-2b^3 + 5b^2c - bc^2 - 2c^3$
	2	$-b+3c$	$-b^2 + 3bc - 2c^2$	0

これから 商は	$2a^2 + (-b+3c)a - (b-c)(b-2c)$
たすき掛けにより	$2 \quad b-c \quad b-c$
	$1 \quad -b+2c \quad -2b+4c$
	$\quad \quad \quad -b+3c$

$$\text{与式} = (a-2b-c)(a-b+2c)(2a+b-c) = -(2a+b-c)(2b+c-a)(2c+a-b) \quad (\text{答})$$

(2) $x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

与式=0 と置くと 6 次の相反方程式である。

$$x^3 (\neq 0) \text{ で割って } \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ と置いて整理すると } t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0$$

$$\text{因数分解して } (t+1)(t-1)(t-3) = 0 \quad \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

$$\text{従って } (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

x^6 の係数は 1 であるから

$$\text{与式} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1) \quad (\text{答})$$

(3) $x^{11} + x^7 + 1$

与式を $f(x)$ とする。 $f(1) = 3, f(-1) = -1$ より、因数分解できるとすると

因数は二次式で x^{11} の係数と定数項は1だから

$$\begin{aligned} x^{11} + x^7 + 1 &= (x^2 + ax + 1)(x^9 + bx^8 + cx^7 + dx^6 + ex^5 + fx^4 + gx^3 + hx^2 + ix + 1) \\ &= x^{11} + (a+b)x^{10} + (c+ab+1)x^9 + (d+ac+b)x^8 + (e+ad+c)x^7 + (f+ae+d)x^6 \\ &\quad + (g+af+e)x^5 + (h+ag+f)x^4 + (i+ah+g)x^3 + (1+ai+h)x^2 + (a+i)x + 1 \\ &\quad \dots \dots (A) \end{aligned}$$

未定係数法により係数比較して

$$a+b=0 \text{ から } b=-a, \quad a+i=0 \text{ から } i=-a,$$

各々次の項、前の項に代入していくと

$$c = a^2 - 1, \quad d = -a^3 + 2a, \quad e = a^4 - 3a^2 + 2$$

$$h = a^2 - 1, \quad g = -a^3 + 2a, \quad f = a^4 - 3a^2 + 1$$

(A) 式にこれらを代入して 1,5,12 項は消え、右辺の 2~4 項、8~11 項は恒等式に 0 で、恒等的に 0 とならない係数 6, 7 項はそのまま残して

$$0 = (f + ae + d)x^6 + (g + af + e)x^5 \dots \dots (B) \text{ となり、各係数} = 0 \text{ から}$$

$$f + ae + d = a^5 + a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 4a + 1 = (a-1)(a^4 + 2a^3 - 2a^2 - 5a - 1) = 0 \dots \dots (C)$$

$$g + af + e = a^5 + a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 3a + 2 = (a-1)(a+1)(a+2)(a^2 - a - 1) = 0 \dots \dots (D)$$

これら (C),(D) 2 式の共通解は $a = 1$

従って、与式は次のように一意的に因数分解される。

$$\text{与式} = (x^2 + x + 1)(x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1) \quad (\text{答})$$

別解)

$$\omega^3 = 1 \text{ より } \omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{ 与式に } \omega \text{ を代入して}$$

$$(\omega^3)^3 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^2 \cdot \omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

与式は $x^2 + x + 1$ なる因数を持つから割り算を実行して、商は

$$x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$$

従って $(x^2 + x + 1)(x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$ と因数分解される。

注) 第 2 項は既約と思うが判定できない。: アイゼンシュタインの既約判定法など

(4) $3x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 1$

与式=0 と置いて 4 次方程式を解く要領で $x = y + \frac{1}{2}$ と変換し

$$(y + \frac{1}{2})^4 - 2(y + \frac{1}{2})^3 + \frac{7}{3}(y + \frac{1}{2})^2 - \frac{4}{3}(y + \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} = 0$$

これを整理して $y^4 + \frac{5}{6}y^2 + \frac{1}{16} = 0 \quad \therefore \quad 48y^4 + 40y^2 + 3 = 0$

$$y^2 = \frac{-20 \pm \sqrt{256}}{48} = \frac{-5 \pm 4}{12} \quad y^2 = -\frac{1}{12}, -\frac{3}{4} \quad \text{から} \quad (x - \frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{12}, -\frac{3}{4}$$

前者より $3x^2 - 3x + 1 = 0$ 後者より $x^2 - x + 1 = 0$

各々の判別式 $D_1 = -3, D_2 = -3$ より、実数の範囲ではこれ以上因数分解できない。

これら二式の積を見ると x^4 の係数は 3、 x^2 の係数は 1 であるから

$$\text{与式} = 3x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) \quad (\text{答})$$

別解)

与式を $f(x)$ とする。整数係数の因数を持てば、 $f(x) = 0$ において

$f(\pm 1), f(\pm \frac{1}{3})$ のいずれもが 0 でないから、一次でなく二次の因数を持つ。

x^4 の係数は 3、 x^2 の係数は 1 であり、次のように置き 未定係数法で a, b を決めるとよい。

$$3x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 1 = (3x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$$

$$\text{または} \quad (3x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 1)$$

右辺を展開・整理して

$$= 3x^4 + (a + 3b)x^3 + (\pm 4 + ab)x^2 \pm (a + b)x + 1$$

係数比較して

$$a + 3b = -6, \quad \pm 4 + ab = 7, \quad \pm(a + b) = -4 \quad (\text{複号同順})$$

これを解いて 複号が + の $a = -3, b = -1$ のみが 3 本の方程式を満足し適する。

従って次の答を得る。

$$3x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) \quad (\text{答})$$

(5) $x^7 + y^7 - (x + y)^7$ 第 3 項を二項定理で展開して

$$= x^7 + y^7 - (x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7)$$

$$= -7xy\{(x^5 + y^5) + 3xy(x^3 + y^3) + 5x^2y^2(x + y)\}$$

$$= -7xy(x + y)(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4)$$

$$= -7xy(x + y)\{x^2(x^2 + xy + y^2) + xy(x^2 + xy + y^2) + y^2(x^2 + xy + y^2)\}$$

$$= -7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2 \quad (\text{答})$$

注) $\frac{x}{y} = t$ と置いて(2)のように解くと $(t + \frac{1}{t} + 1)^2 = 0$ から $(x^2 + xy + y^2)^2$ が出てくる。

また $x^7 + y^7 = (x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$ として $(x + y)^7$ を二項定理で展開するも可。

(6) $(a+b)^5 - a^5 - b^5 \cdots \textcircled{1}$

また、 $\textcircled{1}$ を利用して $(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ を利用して次の $\textcircled{3}$ を因数分解せよ。

$(a+b+c)^5 - (b+c-a)^5 - (c+a-b)^5 - (a+b-c)^5 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ は二項定理で展開して 与式 $= 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4$
 $= 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$ (答)

$\textcircled{2}$ で $P = (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$ と置く。 $\textcircled{1}$ の結果より

$$P = (a+b)^5 + 5(a+b)^4c + 10(a+b)^3c^2 + 10(a+b)^2c^3 + 5(a+b)c^4 + c^5 - a^5 - b^5 - c^5$$

ここで再度を前半の結果を利用して

$$= 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2) + 5(a+b)^4c + 10(a+b)^3c^2 + 10(a+b)^2c^3 + 5(a+b)c^4 = 5(a+b)\{ab(a^2 + ab + b^2) + (a+b)^3c + 2(a+b)^2c^2 + 2(a+b)c^3 + c^4\}$$

P で $c = -a$ と置くと $P = 0$ で、同様にして P は $c+a$, $a+b$, $b+c$ の因数を持つ。

また P は 5 の倍数であることは明らか。

$c = -a$ で組立除法を行うと c^3, c^2, c , 定数項の係数は各々 $1, a+2b, a^2 + 2ab + 2b^2, a^2b + ab^2 + b^3$ 同様にして $c = -b$ で組立除法を行うと c^2, c , 定数項の係数は各々 $1, a+b, a^2 + ab + b^2$ となる。

$c^2 + (a+b)c + a^2 + ab + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$ より

$P = 5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$ (答)

$\textcircled{3}$ で $x = b+c-a, y = c+a-b, z = a+b-c$ と置くと

$x+y+z = a+b+c$

この変換で $\textcircled{3}$ は $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$

$= 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) \cdots \textcircled{4}$ となる。

$\textcircled{4}$ から $\textcircled{3}$ は

$= 5 \cdot 2c \cdot 2a \cdot 2b \cdot \frac{1}{2} \{(2c)^2 + (2a)^2 + (2b)^2\} = 80abc(a^2 + b^2 + c^2)$ (答)

(7) $6(a+b+c)^3 + (a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3 + 54abc$

式の形から $a+b-2c = x, b+c-2a = y, c+a-2b = z$ と置くと

$x+y+z = 0$ で、第2項から第4項の和を先に計算する。

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3xyz = (x+y+z)\{(x+y+z)^2 - 3(xy + yz + zx)\} + 3xyz$
 $= 3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$

これを a について展開・整理すると

$$\begin{aligned}
&= -3\{(a+(b-2c))\{2a-(b+c)\}\{a+(c-2b)\}\} = -3\{2a^3 - 3(b+c)a^2 \\
&\quad + ((c-2b)(b-5c) - (b+c)(b-2c))a + (2b-c)(b-2c)(b+c)\} \\
&= -3\{2a^3 - 3(b+c)a^2 - 3(b^2 - 4bc + c^2)a + (2b^3 - 3b^2c - 3bc^2 + 2c^3)\} \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{一方 } 6\{(a+(b+c))^3\} &= 6\{a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3\} \\
&= 6\{a^3 + 3(b+c)a^2 + 3(b^2 + 2bc + c^2)a + (b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3)\} \quad \dots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

①、② と $54abc$ を辺々加えて

$$\text{与式} = 27(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc)$$

() 内は a について整理して

$$(b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + b^2c + bc^2$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} = (a+b)(b+c)(c+a)$$

これから 与式 $= 27(a+b)(b+c)(c+a)$ (答)

(注) 与式を $f(a,b,c)$ と置くと $f(a,b,c) = f(b,c,a)$ で a,b,c の 3 次の輪環式、
 $f(a,-a,c) = 0$ 等より $f(a,b,c) = k(a+b)(b+c)(c+a)$ と書け、(8)~(10)の
方法では簡単に解けます。

$$(8) \quad a^2(a+b)(a+c)(b-c) + b^2(b+c)(b+a)(c-a) + c^2(c+a)(c+b)(a-b)$$

与式を $f(a,b,c)$ と置き $f(b,c,a)$ を作ると $f(a,b,c) = f(b,c,a)$

従って $f(a,b,c)$ は a,b,c についての 5 次の輪換式となる。

$$f(b,b,c) = 2b^3(b+c)(b-c) + 2b^3(b+c)(c-b) = 0 \quad \text{などから}$$

$f(a,b,c)$ は $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数に持つから 2 次の斉次輪環式
を加えて

$$f(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)\{m(a^2 + b^2 + c^2) + n(ab + bc + ca)\} \quad \text{と書ける。}$$

恒等式であるからこの式に $a=1, b=2, c=3$ を代入して

$$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \{m(1^2 + 2^2 + 3^2) + n(2 + 6 + 3)\}$$

$$\text{これを整理して} \quad 14m + 11n = -36 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に } a=0, b=1, c=2 \text{ とし} \quad 5m + 2n = -9 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{を解いて} \quad m = -1, n = -2$$

以上のことから 与式 $= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2$ (答)

(注) 与式を一文字、例えば a についての 4 次式に整理し、

$$(b-c)\{a^4 + (b+c)a^3 - (b^2 + bc + c^2)a^2 - b(b+c)(b^2 + c^2) + bc(b+c)(b^2 + c^2)\}$$

として b, c での 2 回の組立除法を行い

$$a^2 + 2(b+c)a + (b+c)^2 = (a+b+c)^2 \quad \text{を算出しても良い。}$$

(9) $(c-a)(c+a)^4 + (a-b)(a+b)^4 + (b-c)(b+c)^4$

与式を $f(a,b,c)$ と置く。

$$f(b,c,a) = (c-a)(c+a)^4 + (a-b)(a+b)^4 + (b-c)(b+c)^4 = f(a,b,c)$$

これから $f(a,b,c)$ は a,b,c の 5 次の輪換式

$$f(b,b,c) = (b-c)(b+c)^4 + (c-b)(c+b)^4 = 0$$

同様に $f(a,c,c) = 0, f(a,c,a) = 0$ から 2 次の斉次輪環式を加え

$$f(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)\{m(a^2 + b^2 + c^2) + n(ab + bc + ca)\} \text{ と書ける。}$$

但し m, n は整数。

$$a = -1, b = 0, c = 1 \text{ の時} \quad 2m - n = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a = -1, b = 0, c = 2 \text{ の時} \quad 5m - 2n = -5 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad m = -3, n = -5$$

$$\text{与式} = -(a-b)(b-c)(c-a)(3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 5ab + 5bc + 5ca) \quad (\text{答})$$

(10) $(b-c)^6 + (c-a)^6 + (a-b)^6 - 9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$
 $- 2(a-b)^3(a-c)^3 - 2(b-c)^3(b-a)^3 - 2(c-a)^3(c-b)^3$

与式を $f(a,b,c)$ と置く。

$f(b,c,a) = f(a,b,c)$ で 6 次の輪環式である。

$$a = b \text{ の時} \quad (b-c)^6 + (c-b)^6 - 2(c-b)^6 = 0$$

$$a = 0 \text{ の時} \quad (b-c)^6 + c^6 + b^6 - 9b^2c^2(b-c)^2 - 2b^3c^3 - 2b^3(b-c)^3 - 2c^3(c-b)^3$$

$$\begin{aligned} &= (b-c)^3\{(b^3 - 3b^2c + 3bc^2 + c^3) - 2b^3 + 2c^3\} - 9b^2c^2(b-c)^2 + (b^3 - c^3)^2 \\ &= (b-c)^3\{(c^3 - b^3) + (3bc^2 - 3b^2c)\} - 9b^2c^2(b-c)^2 + (b-c)^2(b^2 + bc + c^2)^2 \\ &= (b-c)^3\{(c-b)(c^2 + bc + b^2) + 3bc(c-b)\} + (b-c)^2\{(b^2 + bc + c^2)^2 - (3bc)^2\} \\ &= -(b-c)^4(c^2 + 4bc + b^2) + (b-c)^2(b^2 + 4bc + c^2)(b-c)^2 \\ &= -(b-c)^4(c^2 + 4bc + b^2) + (b-c)^4(b^2 + 4bc + c^2) = 0 \end{aligned}$$

よって $f(a,b,c) = kabc(a-b)(b-c)(c-a)$ と書けるから

$a = 3, b = 2, c = 1$ として

$$1 + 2^6 + 1 - 9 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2)^3 \cdot (-1) = -12k$$

$$-12k = 0 \quad \text{従って} \quad k = 0 \quad \text{与式} = 0 \quad (\text{答})$$

(注) a, b, c の因数を見つけるのが難しく、その場合は面倒な計算になりますが

3 次の斉次輪環式を加えて

$$f(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)\{l(a^3 + b^3 + c^3) + m(a^2b + b^2c + c^2a) + n(ab^2 + bc^2 + ca^2) + kabc\} \text{ として}$$

$$a = 3, b = 2, c = 1 \text{ のとき} \quad 36l + 25m + 23n + 6k = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a = 1, b = 2, c = -1 \text{ のとき} \quad 8l - m + 5n - 2k = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

そろそろ答が見えかけてきたが

$$a = 2, b = -2, c = 1 \text{ のとき } \quad l - 2m + 10n - 4k = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$a = 2, b = -2, c = 3 \text{ のとき } \quad 27l + 22m + 2n - 12k = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

①～④を満たすのは $(l, m, n, k) = (0, 0, 0, 0)$ しかありえない。従って 与式=0

レポート発表終了後、中村文則先生から下記別解のご指摘があったので紹介する。

(別解)

$$A = b - c, \quad B = c - a, \quad C = a - b \text{ とおく。} \quad (A + B + C = 0)$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= A^6 + B^6 + C^6 - 9C^2 A^2 B^2 + 2C^3 B^3 + 2A^3 C^3 + 2B^3 A^3 \\ &= (A^3 + B^3 + C^3)^2 - (3ABC)^2 \\ &= (A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC)(A^3 + B^3 + C^3 + 3ABC) \\ &= (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)(A^3 + B^3 + C^3 + 3ABC) \\ &= 0 \end{aligned}$$

以 上

参考資料

- 九章出版社(台北市) 「因式分解」技巧 問題 (5), (6)―③, (8), (9)は
演習問題 (答のみ掲載) より借用、解答は小生作成;
(10) はおもしろく例題を転載、紹介したもの。
- 東京図書出版会 「私の数学散歩道」拙著より 問題(4), (6)―①, ②
その他は自作問題