2011/08/08

特殊な高次の連立方程式—遊び心の観点から別解を探る

数実研会員　村田　洋一

今回は自作の１．三元四次連立方程式(問題‐１)を考え、それに途中から遊び心で４個の異なる解を与え、また別の２．三元二次連立方程式(問題-2)では３個の別解を示しました。

(同‐１)の後半は２次式 $f'(t)=0$ の判別式の正負で $f(t)=0$ 実数解の個数が容易に判断でき、1), 2)の２組の３次方程式を解けばよいが、敢えて 2) ニュートンの逐次近似法、3) カルダノの公式、4) Sturm の定理により解(答)を求め論証の根拠としました。

(同-2)は　1) $a+d, a-d$ に着目し b の方程式に変形、 2) $b(a+d)>0$ に注目し b の方程式に変形、3) 行列の定義から行列・行列式の考えに帰着させたものです。

注) (同‐１）の 4)は“数学のいずみ”新着情報 2011.03.26. 安田富久一先生の「解の(Sturm 問題)」を参照して作成しました。記号 $V, \widetilde{V}$ の使い方も同様です。

<u>問題と別解の検討</u>

【問題‐１】　次の連立方程式を解き a, b, c のすべてが実数の解を、必要があれば小数第５位まで求めよ。

$a^2+b^2+c^2=14$ ・・・①

$a^3+b^3+c^3=20$ ・・・②

$a^4+b^4+c^4=98$ ・・・③

定石の基本対称式に着目し　$a+b+c=x, ab+bc+ca=y, abc=z$ として①～③を x, y, z で表す方針でいく。

①より　$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=14$

②より　$(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc=20$　また③より

$$\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}^2-2\{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\}=98$$

これらから　$x^2-2y=14$ 　・・・・・・・・・・・④

$x(x^2-3y)+3z=20$ ・・・・・・・⑤

$(x^2-2y)^2-2(y^2-2zx)=98$ ・・・⑥

④より　$y=\frac{1}{2}x^2-7$　これを⑤に代入　$x(21-\frac{1}{2}x^2)+3z=20$

$z=\frac{1}{6}x^3-7x+\frac{20}{3}$　④と　y,z を各々⑥へ代入して

$14^2-2(\frac{1}{2}x^2-7)^2+4x(\frac{1}{6}x^3-7x+\frac{20}{3})=98$

整理して　$x^4-84x^2+160x=x(x-2)(x-8)(x+10)=0$

よって　$x=2,0,8,-10$　この時各々　$y=-5,-7,25,43$　$z=-6,\frac{20}{3},36,-90$

1）$x=2$，　$y=-5$，$z=-6$ のときこれを 3 解とする 3 次方程式は

$t^3-2t^2-5t+6=0$　これは容易に因数分解できて　$(t-1)(t-3)(t+2)=0$

従って　$(a,b,c)=(1,3,-2),(1,-2,3),(3,-2,1),(3,1,-2),(-2,1,3),(-2,3,1)$

2）$x=0$，　$y=-7$，$z=\frac{20}{3}$ のときは 同様に　$t^3-7t-\frac{20}{3}=0$　この左辺を

$f(t)$ とおき　$f'(t)=0$　から　$t=-\sqrt{\frac{7}{3}}$　で極大値　$\frac{14\sqrt{21}-60}{9}=0.46>0,$

$t=\sqrt{\frac{7}{3}}$ で極小値 $-\frac{14\sqrt{21}+60}{9}=-13.79<0$ より　$f(t)=0$ は 3 個の実数解をもつ。

ここで　$f(t)=0$ の 3 個の実数解を大きな順に各々　α,β,γ　とし Newton の逐次近似法で求めてみる。

$f(3)=-\frac{2}{3}<0$, $f(4)=\frac{88}{3}>0$　また　$-2<-\sqrt{\frac{7}{3}}<-1$，$f(-1)=f(-2)=-\frac{2}{3}$

<0，極大値　$f(-\sqrt{\frac{7}{3}})>0$　から　$3<\alpha<4$，$-2<\beta,\gamma<-1$

初期値を各々 $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ で表し、また $f'(t)=3t^2-7$

$\alpha_0=3$ として　$f(3)=-\frac{2}{3}$　$f'(3)=20$　$\alpha_1=3+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{20}=\frac{91}{30}$

$f(\frac{91}{30})=\frac{271}{27{,}000}$　$f'(\frac{91}{30})=\frac{6181}{300}$　$\alpha_2=\frac{91}{30}-\frac{271}{27{,}000}\cdot\frac{300}{6{,}181}=3.03285$

$\therefore$　$\alpha=3.03285$　（参考　$f(\alpha)=0.00008$）

$\beta_0=-1$ として　$f(-1)=-\frac{2}{3}$　$f'(-1)=-4$　$\beta_1=-1-\frac{1}{6}=-\frac{7}{6}$

$f(-\frac{7}{6})=-\frac{19}{216}$ $f'(-\frac{7}{6})=-\frac{35}{12}$　$\beta_2=-\frac{7}{6}-\frac{19}{216}\cdot\frac{12}{35}=-\frac{377}{315}=-1.196825$

$f(-\frac{377}{315})=\frac{208,272,142}{31,255,875}-\frac{20}{3}=-0.00321$ $f'(-\frac{377}{315})=\frac{426,387}{99,225}-7$

$=-2.70283$　$\beta_3=-1.19682-\frac{0.00321}{2.70283}=-1.19801$

$\therefore\ \beta=-1.19801$（参考 $f(\beta)=0$）

$\alpha+\beta+\gamma=0$ であるから　$\gamma=-1.83484$

従って $(a,b,c)=(\alpha,\beta,\gamma),(\alpha,\gamma,\beta),(\beta,\gamma,\alpha),(\beta,\alpha,\gamma),(\gamma,\alpha,\beta),(\gamma,\beta,\alpha)$

3) $x=8$,　$y=25$, $z=36$ のときこれを 3 解とする 3 次方程式は

$t^3-8t^2+25t-36=0$　　これをカルダノの公式で解いてみよう。

$t=y-(-\frac{8}{3})$ として　$(y+\frac{8}{3})^3-8(y+\frac{8}{3})^2+25(y+\frac{8}{3})-36=0$

これを整理して　$y^3+\frac{11}{3}y-\frac{196}{27}=0$　$y=u+v$　と置きまとめると

$u^3+v^3+(3uv+\frac{11}{3})(u+v)=\frac{196}{27}$　$uv=-\frac{11}{9}$ にとって $u^3+v^3=\frac{196}{27}$

u^3,v^3 を解とする分解方程式は　$s^2-\frac{196}{27}s+(-\frac{11}{9})^3=0$　u^3 に根号＋の

ものをとると　$u^3=\frac{98}{27}+\sqrt{(\frac{98}{27})^2+(\frac{11}{9})^3}=\frac{98+27\sqrt{15}}{27}$

$u=\frac{\sqrt[3]{98+27\sqrt{15}}}{3}$ として　$v=-\frac{11}{3\sqrt[3]{98+27\sqrt{15}}}$　求める 3 個の解は

実数解は $u+v+\frac{8}{3}=1.9576-0.6243+2.6666=3.9993$　複素数解は

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ として　$\omega u+\omega^2 v+\frac{8}{3}=1.9993+2.2358i$

$\omega^2 u+\omega v+\frac{8}{3}=1.9993-2.2358i$

しかし実数解 3.9993 がほぼ 4 なので、$t=4$ を代入すると与式$=0$となり、$(t-4)(t^2-4t+9)=0$ から 解は 4、$2\pm\sqrt{5}i$ となる。$(t-4)$ を因数に持つことに気がつかなかったもの。

4） $x=-10$， $y=43$， $z=-90$ のときも同様に $t^3+10t^2+43t+90=0$

これの実数解の個数を Sturm の定理から求めてみよう。

$f_0(t)=t^3+10t^2+43t+90$ として $f_1(t)=f_0'(t)=3t^2+20t+43$

$f_0(t)=\frac{1}{9}(3t+10)f_1(t)+\frac{58}{9}t+\frac{380}{9}$ $\therefore f_2(t)=-\frac{2}{9}(29t+190)$

$f_1(t)=(\frac{27}{58}t+\frac{45}{29\cdot29})(58t+380)+387-\frac{45\cdot380}{29\cdot29}$ $\therefore f_3(t)=-\frac{308,367}{841}$

これから $V(+\infty)=\tilde{V}(+,+,-,-)=1$ $V(-\infty)=\tilde{V}(-,+,+,-)=2$

$V(-\infty)-V(+\infty)=2-1=1$ 従って 1 個の実数解と 2 個の複素数解を持つ。。

以上のことから a,b,c のすべてが実数の解の組は 1)、2) からの 12 組に限る

【問題-2】 次の連立方程式を解け。

$a^2+b^2=17$ ・・・①

$ab+bd=6$ ・・・②

$b^2+d^2=5$ ・・・③

1) ①−③ $a^2-d^2=(a+d)(a-d)=12$ ②より $a+d=\frac{6}{b}$ また $a-d=2b$

これらを加えて $a=b+\frac{3}{b},\ d=\frac{3}{b}-b$ ・・・④ a を ①に代入 $(b+\frac{3}{b})^2+b^2=1$

$2b^4-11b^2+9=0$ この複二次方程式を解いて $b=\pm1,\ \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$b=1$ のとき ④から $a=4,\ d=2$ 以下、同様にして次の 4 解を得る。

$(a,b,d)=(4,1,2),(-4,-1,-2),(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

2) ①，③より $a=\sqrt{17-b^2}$， $d=\sqrt{5-b^2}$ とすると $a>d$

②より $b(\sqrt{17-b^2}+\sqrt{5-b^2})=6$ この式で b と( )内の無理式の積＞0

より ｉ） $b>0$ の時 $a+d>0$ または $a-d>0$

ⅱ） $b<0$ $-a-d<0$ または $-a+d<0$ で これはｉ）に同じ

従って　$b(\sqrt{17-b^2} \pm \sqrt{5-b^2}) = 6$ を考えれば十分である。この時、両辺＞0

より平方して　$b^2\{(22-2b^2) \pm 2\sqrt{(17-b^2)(5-b^2)}\ \} = 36$

$\pm 2b^2\sqrt{b^4-22b^2+85} = 2b^4-22b^2+36$　再度平方して整理すると

$144(b^2-1)(2b^2-9) = 0$　　これから　$b = \pm 1,\ \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$　以下省略

1)同様の解の組 (a,b,d) を得る。

3) 方程式の形から

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$　とすると　$B^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bd \\ ab+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} (= C)$

ケーリー・ハミルトンの定理より

$C = B^2 = (a+d)B - (ad-b^2)I = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$　　また B の行列式 $(ad-b^2)$

の自乗が 17•5 - 6•6 = 49　に等しいことから　$ad-b^2 = \pm 7$

ｉ）$ad-b^2 = 7$ の時

$(a+d)B = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ また $6^2\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = 36\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

より　$(a+d)^2B^2 = 36C$　これから　$a+d = \pm 6$,　$B = \pm\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

すなわち　$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} : (a+d=6)$　またはその負 $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ が得られる。

ii) $ad-b^2 = -7$ の時

同様に　$(a+d)B = 2\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$　また $2^2\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 = 8\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$a+d = \pm 2\sqrt{2}$ より $B = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

すなわち $\begin{pmatrix} \dfrac{5\sqrt{2}}{2} & \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} : (a+d = 2\sqrt{2})$ またはその負 $\begin{pmatrix} -\dfrac{5\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

が得られる。

従って 1),2)同様の解の組が求められる。

以　上