私の数学散歩道(49)　　少し難しい分数関数の積分について

数実研会員　　村田　洋一

今まで複雑な分数関数の積分は手間がかかり敬遠気味だったが、このたび類例を参考に

4 問取り上げ自分なりに解いてみた。（積分定数は省略。）　参考資料に解答はない。

（問題）次の積分を求めよ。

$$1)I_1=\int\frac{x^5}{x^4-x^2-6}dx$$

$$2)I_2=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x}}$$

$$3)I_3=\int\frac{x+1}{-1+x-x^2}dx$$

$$4)\ I_4=\int\frac{xdx}{1+\cos x}$$

1) 割り算を実行して $\dfrac{x^5}{x^4-x^2-6}=x+\dfrac{x^3+6x}{x^4-x^2-6}$ 第2項を $\dfrac{ax+b}{x^2+2}+\dfrac{cx+d}{x^2-3}$ として係数比較をする。

分子は $x^3+6x=(a+c)x^3+(b+d)x^2+(2c-3a)$

$-3b+2d$ これから $a=-\dfrac{4}{5},b=0,c=\dfrac{9}{5},d=0$ 従って被積分関数は $x+\dfrac{9x}{5(x^2-3)}-\dfrac{4x}{5(x^2+2)}$

$$I_1=\frac{x^2}{2}+\frac{9}{10}\log\left|x^2-3\right|-\frac{2}{5}\log(x^2+2)$$

2) $x=\tan\theta$ とすると $dx=\sec^2\theta d\theta,\sqrt{1+x^2}=\sec\theta$ より

$$I_2=\int\frac{\sec^2\theta}{(1+\tan\theta)\sec\theta}d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\int\frac{d\theta}{\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\tan(\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{\pi}{8})\right|$$

（公式より $\int\sec\theta d\theta=\log\left|\tan(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4})\right|$）

２）別解

$\sqrt{1+x^2}=x+t$ とすると $x=(1-t^2)/(2t),dx=-(t^2+1)/(2t^2)dt$

$$\sqrt{1+x^2}=\frac{t^2+1}{2t}, I_2=-\int\frac{\frac{t^2+1}{2t^2}}{\frac{2t+1-t^2}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t}}dt=2\int\frac{dt}{t^2-2t-1}$$

$\dfrac{2}{t^2-2t-1}=\dfrac{\mathrm{A}}{t-1+\sqrt{2}}+\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{t}-1-\sqrt{2}}$, 右辺ｔの係数からＡ+Ｂ＝０　定数項は

$-A(1+\sqrt{2})+B(\sqrt{2}-1)=2, -\mathrm{A}=\mathrm{B}$ よりＢ＝$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $A=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これから　$I_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int\left\{\frac{1}{t-(1+\sqrt{2})}-\frac{1}{t-(1-\sqrt{2})}\right\}dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\log\left|\sqrt{x^2+1}-x-1-\sqrt{2}\right|\right.$

$\left.-\log\left|\sqrt{x^2+1}-x-1+\sqrt{2}\right|\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x-1-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x-1+\sqrt{2}}\right|$　（見掛けは違う）

3)$I_3=-\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)+3}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$ 第２項:

$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$とすると積分は

$-\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}=-\sqrt{3}\theta$ 置き換えから$\tan\theta=\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}, \theta=\tan^{-1}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$　求める積分は

$$I_3=-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)-\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

4)$I_4=x(\tan\dfrac{x}{2})'dx=x\tan\dfrac{x}{2}-\displaystyle\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}+2\int\frac{(\cos\frac{x}{2})'}{\cos\frac{x}{2}}dx=x\tan\frac{x}{2}+2\log\cos\frac{x}{2}$

（参考）　$(\tan\dfrac{x}{2})'=\dfrac{\frac{1}{2}(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}+1}=\dfrac{1}{1+\cos x}$　　以　上

（参考資料）ピアーズ・フォスター　　簡易積分表　第４版