私の数学散歩道(47)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　村田　洋一

幾　分　難　し　い　因　数　分　解

微分と積分、掛け算と割り算、行列と逆行列、式の展開と因数分解など 数学には逆算の関係がよく出てきます。この中でも因数分解が好きで今まで 数学散歩道(38),(39),(46)などで取り上げました。

今回 新作に一部リバイバルを含め まとめてみました。

(問題)　次の各式を因数分解せよ。

1.　x^7+x^5+1

2.　$8(x+y+2z)^3-(4x+5y+6z)^3+(2x+3y+2z)^3$

3.　$x^6-4x^5+2x^4-4x^3+2x^2-4x+1$

4-1.　$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$

4-2.　$(a+b+c+d)^5-(a+b+c)^5-d^5$

4-3.　$(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$

5-1.　$(a+b)^7-a^7-b^7$

5-2.　$(a+b+c)^7-(a+b)^7-c^7$

(解答)

１．$f(x)=x^7+x^5+1$ とおく。$f(1)\neq 0, f(-1)\neq 0$ より $f(x)$ は一次の因数をもたない。

従って $f(x)=(x^2+kx+1)(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1)=x^7+(a+k)x^6+(b+ak+1)x^5$

$$+(c+bk+a)x^4+(d+ck+b)x^3+(c+kd+1)x^2+(k+d)x+1$$

（k,a,b,c,d ）は整数と置くことができる。係数を比較して

$k=-a$・・①　　$b+ak=b-k^2=0$・・②　　$a+c=ab$・・③　　$b+d=ac$・・④

$c+kd=-1$・・⑤　　$k=-d$・・⑥

① ② ⑥の $a=-k, b=k^2$ 、$d=-k$ を③ ④に代入　③より　$c=k-k^3$

④より　$k^2-k=-kc$　$k\neq 0$ から $c=1-k$　これらを等値して $k^3-2k+1=0$　　$k=1$

他の未知数は　$a=-1, b=1, c=0, d=-1$　これらは⑤を満たす。

これらから　　$f(x)=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1)$

(別解)　ω の利用

1 の立方根の一つ ω で $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$ が成り立つから

$f(\omega)=\omega(\omega^3)^2+\omega^2(\omega^3)+1=\omega^2+\omega+1=0$ で $f(x)$ は因数 x^2+x+1 を持つ。

割り算を実行して上記と同じ解を得る。

2. 与式を $g(x)$ とく。　　$g(x)=\left[2(x+y+2z)\right]^3+\left[-(4x+5y+6z)\right]^3+(2x+3y+2z)^3$

括弧内の多項式のそれぞれを A,B,C として $A+B+C$ を計算すると x,y,z とも 0 になる。従って公式 $A^3+B^3+C^3=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)+3ABC$ の右辺第 1 項が 0 となる。残るのは $3ABC$ だから整理して

$g(x)=-6(x+y+2z)(4x+5y+6z)(2x+3y+2z)$

3. 与式を $h(x)$ とすると、$h(x)=0$ は 6 次の相反方程式でこれを解く。

両辺を $x^3(\neq 0)$ で割って $x^3-4x^2+2x-4+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$　これを整理して

$(x+\frac{1}{x})^3-4(x+\frac{1}{x})^2-(x+\frac{1}{x})+4=0$　　$(x+\frac{1}{x})\left[(x+\frac{1}{x})^2-1\right]-4\left\{(x+\frac{1}{x})^2-1\right\}=0$

$(x+\frac{1}{x}+1)(x+\frac{1}{x}-1)(x+\frac{1}{x}-4)=0$ 分母を払って　$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-4x+1)=0$

これから　$h(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-4x+1)$

4-1. $f(a,b,c)=(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$ と置く。

$f(a,b,c)=f(a,c,b)=f(c,b,a)=f(b,a,c)$ でどの 2 変数を入れ替えても変わらないから与式は対称式である。 $f(a,-b,c)=(a-a+c)^5-a^5-(-a)^5-c^5=0$ から 与式は $(a+b)$ を同様にして $(b+c),(c+a)$ を因数に持つ。

$f(a,b,c)$ は一つの文字について 4 次の対称式で、基本対称式とあわせ

$f(a,b,c)=k(a+b)(b+c)(c+a)\left\{s(a^2+b^2+c^2)+t(ab+bc+ca)\right\}$ と書くことができる。

これは恒等式であるから、任意の整数を代入し (k,s,t) を求めてみよう。

$(a,b,c)=(1,-2,3)$ の時　$-4k(14s-5t)=2^5-1^5+2^5-3^5=-180$　　$k(14s-5t)=45$ ・・①

$(a,b,c)=(0,1,2)$ の時　$6k(5s+2t)=3^5-1^5-2^5=210$　　$k(5s+2t)=35$ ・・②

$(a,b,c)=(2,-1,3)$ の時　$10k(14s+t)=4^5-2^5+1^5-3^5=750$　　$k(14s+t)=75$ ・・③

①,②,③より $\frac{1}{k}$ を作って等値、辺々5 倍して　$\frac{16s-5t}{9}=\frac{5s+2t}{7}=\frac{14s+t}{15}$

これを解いて（解かなくても $s=t=1$ が見やすいが）　$k=5$

これから　$f(a,b,c)=5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

(別解)　二項定理の応用

. $f(a,b,c)=(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5=(a+b)^5+5(a+b)^4c+10(a+b)^3c^2+10(a+b)^2c^3$
$+5(a+b)c^4+c^5-a^5-b^5-c^5$

ここで $(a+b)^5-a^5-b^5=5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$ を代入

$=\ 5(a+b)\left\{ab(a^2+ab+b^2)+(a+b)^3c+2(a+b)^2c^2+2(a+b)c^3+c^4\right\}$

$f(a,b,c)$ は対称式であるから $(b+c),(c+a)$ も因数に持つ。割り算を行って

$$\left\{c^4+2(a+b)c^3+2(a+b)^2c^2+(a+b)^3c+ab(a^2+ab+b^2)\right\}/\left\{c^2+(a+b)c+ab\right\}$$

$$=c^2+(a+b)c+(a^2+ab+b^2)$$

従って　$f(a,b,c)=5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

4-2.　$f(a,b,c,d)=(a+b+c+d)^5-(a+b+c)^5-d^5$ と置く。

$$f(a,b,c,d)=(a+b+c)^5+5(a+b+c)^4d+10(a+b+c)^3d^2+10(a+b+c)^2d^3$$
$$+5(a+b+c)d^4+d^5-(a+b+c)^5-d^5$$

$$=5d(a+b+c)\left\{(a+b+c)^3+2d(a+b+c)^2+2d^2(a+b+c)+d^3\right\}$$

ここで$\{\quad\}$内の $a+b+c=t$ とすると　$t^3+d^3+2dt^2+2d^2t=(t+d)\left\{(t^2-td+d^2)+2dt\right\}$

$$f(a,b,c,d)=(a+b+c+d)^5-(a+b+c)^5-d^5=5td(t+d)(t^2+td+d^2)$$

元に戻して整理すると

$$f(a,b,c,d)=5d(a+b+c)(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2ca+da+db+dc)$$

＊当初　$(a+b+c+d)^5-a^5-b^5-c^5-d^5$　の因数分解で作問したが因数分解不可のため4-1.との差に切り替えたもの。

4-3.　$f^*(a,b,c)=(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$　と置く。

ここで　$x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$　と置き換えると $x+y+z=a+b+c$

4-1.とあわせて

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

また　$x+y=2c, y+z=2a, z+x=2b$,　右辺末項$=\dfrac{1}{2}\left\{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right\}$

これから　$f^*(a,b,c)=5\cdot 2c\cdot 2a\cdot 2b\cdot\dfrac{1}{2}\left\{(2c)^2+(2a)^2+(2b)^2\right\}=80abc(a^2+b^2+c^2)$

5-1.　$(a+b)^7-a^7-b^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7-a^7-b^7$

$$=7ab(a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^4+b^5)=7ab(a+b)\left\{(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\right.$$

$$\left.+3ab(a^2-ab+b^2)+5a^2b^2\right\}=7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)$$

$$=7ab(a+b)\left\{(a^2+b^2)+ab\right\}^2=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$$

5-2.　$(a+b+c)^7-(a+b)^7-c^7$

$$=(a+b)^7+7(a+b)^6c+21(a+b)^5c^2+35(a+b)^4c^3+35(a+b)^3c^4+21(a+b)^2c^5$$

$+7(a+b)c^6+c^7-(a+b)^7-c^7$

$$=7c(a+b)\left\{c^5+3(a+b)c^4+5(a+b)^2c^3+5(a+b)^3c^2+3(a+b)^4c+(a+b)^5\right\}$$

$\{\quad\}$ 内の相反方程式を 0 にするのは $c=-(a+b)$ 、割り算を実行して

$$=7c(a+b)(a+b+c)\left\{c^4+2(a+b)c^3+3(a+b)^2c^2+2(a+b)^3c+(a+b)^4\right\}$$

$\{\quad\}$ 内が因数分解されるためには　$c=-u(a+b)$ なる整数 $u(<0)$ が必要。これを代入、

$(a+b)^4$ で割って $u^4-2u^3+3u^2-2u+1=0$ 相反方程式であるから $u^2(\neq 0)$ で割り整理して

$(u+\dfrac{1}{u})^2-2(u+\dfrac{1}{u})+1=(u+\dfrac{1}{u}-1)^2=0$　　$\therefore (u^2-u+1)^2=0$

定義から　$u=-\dfrac{c}{a+b}$　　これを上の式に代入して整理すると

$\left\{c^2+c(a+b)+(a+b)^2\right\}^2=0$　　念のためこの式を平方すると $\{\quad\}$ 内の 4 次式になる。

よって $(a+b+c)^7-(a+b)^7-c^7$

$$=7c(a+b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2++2ab+bc+ca)^2$$

＊当初　$(a+b+c)^7-a^7-b^7-c^7$ の因数分解で作問したが因数分解がきれいでないため 5-1.との差の形に切り替えたもの。

（参考資料）

1. 九章出版社（台北市）　「因式分解」　　　問題 4-3. は借用、解答は小生作成
2. 東京図書出版会　拙著　「私の数学散歩道」　問題 4-1.転載
3. その他は自作問題