私の数学散歩道(46)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　村田　洋一

自然数の累乗和（冪：8 から 10 まで）ほかの因数分解について

「数学散歩道(45)」で自然数の累乗和（冪が 8,9,10）の結果の因数分解表示について幾分複雑なため触れていないが、本稿でチャレンジしてみた。高次式で一般的な解き方を知らないが、いろいろ試してみた。ミスがあるかも知れない。各位のご教示をお願いできれば幸いです。

1．冪が 10 の時は $\sum_{k=1}^{n} k^{10}$

$$=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^{9}-n^{7}+n^{5}-\frac{1}{2}n^{3}+\frac{5}{66}n=\frac{1}{66}n(6n^{10}+33n^{9}+55n^{8}-66n^{6}+66n^{4}-33n^{2}+5)$$

(　)内＝0 で　$n=-1$ とすると 0 より　組立除法から

$$=(n+1)(6n^{9}+27n^{8}\ 28n^{7}-28n^{6}-38n^{5}+38n^{4}+28n^{3}-28n^{2}-5n+5)$$

(　)内＝0 の 9 次方程式を ke!san の n 次方程式の解法により求める。

9 個の解の内　複素数解は 4 個、実数解は 5 個(小数点以下 14 桁表示を同 6 桁に簡略化)

実数解は　-0.5, -1.618033,　0.618033,　-1.518682,　0.518682

-1.618033+ 0.618033=-1　　-1.618033×0.618033=-0.999997?・・=-1

これらを 2 解とする 2 次方程式は　$n^2+n-1=0$　　-0.5 より　1 次因数は $2n+1$

-1.518682＋0.518682＝-1　　-1.518682×0.518682=-0.787713

これからはうまい 2 次の因数はとれない。

以上のことから　(　)内は　$(2n+1)(n^2+n-1)$ の因数を持つ。

上記の 9 次方程式÷ $(2n+1)(n^2+n-1)=3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5$

この 6 次方程式の複素数解は 4 個、実数解は前と同じ-1.518682,　0.518682 の 2 個で 2 次の因数は出てこない。従って因数分解は

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10}=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)\ (3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$$

2.　冪が 9 の時は $\sum_{k=1}^{n} k^{9}$

$$=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^{9}+\frac{3}{4}n^{8}-\frac{7}{10}n^{6}+\frac{1}{2}n^{4}-\frac{3}{20}n^{2}=\frac{1}{20}n^{2}(2n^{8}+10n^{7}+15n^{6}-14n^{4}+10n^{2}-3)$$

(　)内＝0 の 8 次方程式を ke!san の n 次方程式の解法により求める。

8 個の解の内　複素数解は 4 個、実数解は 4 個(小数点以下 14 桁表示を同 5 桁に簡略化)

実数解は　0.999999,　0.999999,　-1.618033,　0.618033

先の 2 個から因数は $(n+1)^2$ 、後の 2 個は 1 .の議論同様 (n^2+n-1) が考えられる。

(　)内＝0 の 8 次方程式÷ $(n+1)^2(n^2+n-1) = 2n^4+4n^3-n^2-3n+3$

$2n^4+4n^3-n^2-3n+3$＝0 は複素数解を 4 個持つから既約である。因数分解は

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{20} n^2(n+1)^2(n^2+n-1)\ (2n^4+4n^3-n^2-3n+3)$$

3.　冪が 8 の時 $\sum_{k=1}^{n} k^8 =$

$$\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n = \frac{1}{90}n(10n^8+45n^7+60n^5-42n^4+20n^2-3)$$

(　)内＝0 の 8 次方程式を解くと複素数解は 6 個、実数解は 2 個(小数点以下　同)

であるが、後者から有意な因数が得られず上式は既約である。

4.　その他の冪の時

4-1.　冪が 7 の時 $\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$

(　)内＝0 の 4 次方程式を解くと複素数解 4 個 (小数点以下　同)より既約となる。

4-2.　冪が 6 の時 $\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$

(　)内＝0 の 4 次方程式を解くと複素数解 4 個 (小数点以下　同)より既約となる

岩波数学入門辞典で「アイゼンシュタイン」の既約判定法がある、ということを知った。

整数係数の多項式　$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdot\ \cdot\ \cdot + a_n$ と素数 p に対して

(1) a_0 は p で割り切れない。

(2) $a_1, \ldots, a_n$ は p で割り切れるが、a_n は p^2 では割り切れない。

が成り立てば、$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdot\ \cdot\ \cdot + a_n$ は Q 上の多項式として既約である。

これが一つの素数 p について成り立てば良いなら、上記 1～4 は成立するようである。

以　上