私の数学散歩道(45)　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　村田　洋一

手計算による自然数の累乗和（冪：1 から 10 まで）の算定について

1.はじめに

自然数の累乗和は長い歴史を持っている。

インタネット等で調べると フアウルハーバーの公式（最初の n 個の k 乗数の和を ベルヌーイ数を用いて n の多項式で表わす公式）ほか面倒な議論が多かった。これらにこだわっていると自分なりのものができないと思って、既知の k 乗和を次々と利用していく 高校数学的な「逐次代入法」で要領よく計算してみることにした。とくに k が 7 から 10 の累乗和は 計算が急速に煩雑になるため、計算ソフトによるべし として適切な例がなかったことも今回のテーマ選定の一因となった。

計算だけの問題であるが途中一か所でも間違うと以降の累乗和が誤りになってしまう。
途中で投げだしたいと考えたことも何度かあったが、$n=6$ の時から計算式の記述スタイルを統一して各累乗和の計算と 0 となる項を含めすべての冪の係数のチェックを行った。　また 各累乗和の結果は多項式表示にし、下記 5）～7) 等の因数分解については 「私の数学散歩道(46)」に詳述した。

2. $\sum_{k=1}^{n} k$ から $\sum_{k=1}^{n} k^{10}$ へ

高校数学で学ぶ　$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ の計算 には

疑問の余地がないだろう。$\sum_{k=1}^{n} k^3$ を求める場合、恒等式　$(r+1)^4 - r^4 = 4r^3 + 6r^2 + 4r + 1$ に

$r = 1, 2,\cdot\ \cdot, n$ を代入し辺々加えて整理すると　$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ になる。

以下 この方法で冪が 4 の時から 10 の時まで順に計算していく。

1) 冪が 4 のとき展開式 $(r+1)^5 - r^5 = 5r^4 + 10r^3 + 10r^2 + 5r + 1 (r = 1, 2, 3\cdot\ \cdot n)$ を代入

これから　$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{5}n$

$$= \frac{1}{5}n^5 + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n - \frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 + n^2) - \frac{1}{3}(2n^3 + 3n^2 + n) - \frac{1}{2}(n^2 + n) - \frac{1}{5}n$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

2）冪が 5 の時も $(n+1)^6 - 1^6 = 6\sum_{k=1}^{n} k^5 + 15\sum_{k=1}^{n} k^4 + 20\sum_{k=1}^{n} k^3 + 15\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k + n$

$$6\sum_{k=1}^{n}k^5=(n+1)^6-1-\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-5n^2(n+1)^2-\frac{5}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$-3n(n+1)-n=n^6+6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n-\frac{1}{2}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

$$-5(n^4+2n^3+n^2)-\frac{5}{2}(2n^3+3n^2+n)-(3n^2+4n)=n^6+3n^5+\frac{5}{2}n^4-\frac{1}{2}n^2$$

これから 因数分解して $\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$

3) 冪が 6 の時も同様に

$$(n+1)^7-1^7=7\sum_{k=1}^{n}k^6+21\sum_{k=1}^{n}k^5+35\sum_{k=1}^{n}k^4+35\sum_{k=1}^{n}k^3+21\sum_{k=1}^{n}k^2+7\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$7\sum_{k=1}^{n}k^6=(n+1)^7-1^7-\frac{7}{4}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-\frac{7}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)-\frac{35}{4}n^2(n+1)^2$$

$$-\frac{7}{2}n(n+1)(2n+1)-\frac{7}{2}n(n+1)-n=n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n$$

$$-\frac{7}{4}(2n^6+6n^5+5n^4-n^2)-\frac{7}{6}(6n^5+15n^4+10n^3-n)-\frac{35}{4}(n^4+2n^3+n^2)-\frac{7}{2}(2n^3+3n^2+n)$$

$$-\frac{7}{2}n(n+1)-n$$

これから $\sum_{k=1}^{n}k^6=\frac{1}{7}n^7+n^6+3n^5+5n^4+5n^3+3n^2+n-\frac{1}{4}(2n^6+6n^5+5n^4-n^2)-\frac{1}{6}(6n^5+15n^4$

$$+10n^3-n)-\frac{5}{4}(n^4+2n^3+n^2)-\frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n)-\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{7}n$$

$$=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n=\frac{1}{42}n(6n^6+21n^5+21n^4-7n^2+1)$$

$$=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

４） 冪が 7 の時は

$$(n+1)^8-1^8=8\sum_{k=1}^{n}k^7+28\sum_{k=1}^{n}k^6+56\sum_{k=1}^{n}k^5+70\sum_{k=1}^{n}k^4+56\sum_{k=1}^{n}k^3+28\sum_{k=1}^{n}k^2+8\sum_{k=1}^{n}k+n$$

これから $8\sum_{k=1}^{n}k^7=n^8+8n^7+28n^6+56n^5+70n^4+56n^3+28n^2+8n$

$$-\frac{2}{3}n(n+1)(6n^5+15n^4+6n^3-6n^2-n+1)-\frac{14}{3}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)-\frac{7}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$\times(3n^2+3n-1)-14n^2(n+1)^2-\frac{14}{3}n(n+1)(2n+1)-4n(n+1)-n$$

両辺を 3 倍して　$24\sum_{k=1}^{n} k^7 = 3(n^8+8n^7+28n^6+56n^5+70n^4+56n^3+28n^2+8n)$

$-2(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n)-14(2n^6+6n^5+5n^4-n^2)-7(6n^5+15n^4+10n^3-n)$

$-42(n^4+2n^3+n^2)-14(2n^3+3n^2+n)-12n(n+1)-3n$

$= n^2(3n^6+12n^5+14n^4-7n^2+2) = n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$

これから

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2\,(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

5）冪が 8 の時は

$$(n+1)^9-1^9 = 9\sum_{k=1}^{n}k^8+36\sum_{k=1}^{n}k^7+84\sum_{k=1}^{n}k^6+126\sum_{k=1}^{n}k^5+126\sum_{k=1}^{n}k^4+84\sum_{k=1}^{n}k^3+36\sum_{k=1}^{n}k^2+9\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$\sum_{k-1}^{n}k^8 = \frac{1}{9}(n+1)^9-\frac{1}{9}-4(\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2)-\frac{28}{3}(\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n)$$

$$-14(\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2)-14(\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n)-\frac{28}{3}(\frac{1}{4}n^4+\frac{n^3}{2}+\frac{1}{4}n^2)$$

$$-4(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n)\ -(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n)-\frac{n}{9}$$

また　$\frac{1}{9}(n+1)^9-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}n^9+n^8+4n^7+\frac{28}{3}n^6+14n^5+14n^4+\frac{28}{3}n^3+4n^2+n$ より

$$\sum_{k=1}^{n}k^8 = \frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n$$

6）冪が 9 の時は

$(n+1)^{10}-1^{10} =$

$$10\sum_{k=1}^{n}k^9+45\sum_{k=1}^{n}k^8+120\sum_{k=1}^{n}k^7+210\sum_{k=1}^{n}k^6+252\sum_{k=1}^{n}k^5+210\sum_{k=1}^{n}k^4+120\sum_{k=1}^{n}k^3+45\sum_{k=1}^{n}k^2+10\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^9 = \frac{1}{10}(n+1)^{10}-\frac{1}{10}-\frac{9}{2}(\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n)-12(\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4$$

$$+\frac{1}{12}n^2)-21(\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n)-\frac{126}{5}(\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2)-21(\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4$$

$$+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n)-12(\frac{1}{4}n^4+\frac{n^3}{2}+\frac{1}{4}n^2)-\frac{9}{2}(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n)-(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n)-\frac{1}{10}n$$

また　$\frac{1}{10}(n+1)^{10}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}n^{10}+n^9+\frac{9}{2}n^8+12n^7+21n^6+\frac{126}{5}n^5+21n^4+12n^3+\frac{9}{2}n^2+n$　より

$$\sum_{k=1}^{n}k^9 = \frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2$$

7）冪が 10 の時は

$$(n+1)^{11}-1^{11}=11\sum_{k=1}^{n}k^{10}+55\sum_{k=1}^{n}k^{9}$$

$$+165\sum_{k=1}^{n}k^{8}+330\sum_{k=1}^{n}k^{7}+462\sum_{k=1}^{n}k^{6}+462\sum_{k=1}^{n}k^{5}+330\sum_{k=1}^{n}k^{4}+165\sum_{k=1}^{n}k^{3}+55\sum_{k=1}^{n}k^{2}+11\sum_{k=1}^{n}k+n$$

また $\frac{1}{11}(n+1)^{11}-\frac{1}{11}=\frac{1}{11}n^{11}+n^{10}+5n^{9}+15n^{8}+30n^{7}+42n^{6}+42n^{5}+30n^{4}+15n^{3}+5n^{2}+n$ と

$$\sum_{k=1}^{n}k^{10}=\frac{1}{11}(n+1)^{11}-\frac{1}{11}-5(\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^{9}+\frac{3}{4}n^{8}-\frac{7}{10}n^{6}+\frac{1}{2}n^{4}-\frac{3}{20}n^{2})-15(\frac{1}{9}n^{9}+\frac{1}{2}n^{8}$$

$$+\frac{2}{3}n^{7}-\frac{7}{15}n^{5}+\frac{2}{9}n^{3}-\frac{1}{30}n)-30(\frac{1}{8}n^{8}+\frac{1}{2}n^{7}+\frac{7}{12}n^{6}-\frac{7}{24}n^{4}+\frac{1}{12}n^{2})-42(\frac{1}{7}n^{7}+\frac{1}{2}n^{6}+\frac{1}{2}n^{5}$$

$$-\frac{1}{6}n^{3}+\frac{1}{42}n)-42(\frac{1}{6}n^{6}+\frac{1}{2}n^{5}+\frac{5}{12}n^{4}-\frac{1}{12}n^{2})-30(\frac{1}{5}n^{5}+\frac{1}{2}n^{4}+\frac{1}{3}n^{3}-\frac{1}{30}n)$$

$-15(\frac{1}{4}n^{4}+\frac{1}{2}n^{3}+\frac{n^{2}}{4})-5(\frac{1}{3}n^{3}+\frac{1}{2}n^{2}+\frac{1}{6}n)-(\frac{1}{2}n^{2}+\frac{1}{2}n)-\frac{1}{11}n$ から

$$\sum_{k=1}^{n}k^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^{9}-n^{7}+n^{5}-\frac{1}{2}n^{3}+\frac{5}{66}n$$

3. おわりに

4 乗和から 10 乗和までの公式を纏めて表示し 本レポートを終わりたい

$$\sum_{k=1}^{n}k^{4}=\frac{1}{5}n^{5}+\frac{1}{2}n^{4}+\frac{1}{3}n^{3}-\frac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{5}=\frac{1}{6}n^{6}+\frac{1}{2}n^{5}-\frac{5}{12}n^{4}-\frac{1}{12}n^{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{6}=\frac{1}{7}n^{7}+\frac{1}{2}n^{6}+\frac{1}{2}n^{5}-\frac{1}{6}n^{3}+\frac{1}{42}n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{7}=\frac{1}{8}n^{8}+\frac{1}{2}n^{7}+\frac{7}{12}n^{6}-\frac{7}{24}n^{4}+\frac{1}{12}n^{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{8}=\frac{1}{9}n^{9}+\frac{1}{2}n^{8}+\frac{2}{3}n^{7}-\frac{7}{15}n^{5}+\frac{2}{9}n^{3}-\frac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{9}=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^{9}+\frac{3}{4}n^{8}-\frac{7}{10}n^{6}+\frac{1}{2}n^{4}-\frac{3}{20}n^{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^{9}-n^{7}+n^{5}-\frac{1}{2}n^{3}+\frac{5}{66}n$$

（参考資料）　(1)インタネット　ウイキペディア
フアウルハーバーの公式、ベルヌーイ数

以　上