私の数学散歩道(44)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　村田　洋一

初等数学第 92 号 「第 91 号に関連して」 について

標記の初等数学第 92 号に西山先生の下記コメントがあり、興味を覚えたため (1)～(3)の解答を試み⑥～⑧の気付き事項を付け加えてみた。

1. $\alpha=\sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{5}+11}{2}},\beta=\sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ のとき

(1) $\alpha\beta$ を求めよ。　(2) $\alpha-\beta-1$ は正か、負か、0 か を判定せよ。

（17 藤田保健衛生大・医）

また 次のようにすると (3) $\alpha\beta=1$， $\alpha-\beta=k$ となる。

$$\alpha=\sqrt[5]{\frac{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}+(k^5+5k^3+5k)}{2}} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\beta=\sqrt[5]{\frac{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}-(k^5+5k^3+5k)}{2}} \quad \cdots\cdots ②$$

解 (1) $\alpha\beta=\sqrt[5]{\dfrac{125-121}{4}}=1$　　(2) $\alpha^5-\beta^5=\dfrac{5\sqrt{5}+11}{2}-\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}=11$

$\alpha^5-\beta^5=(\alpha-\beta)(\alpha^4+\alpha\beta^3+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta+\beta^4)$　　ここで $\alpha-\beta=k$ より

$=(\alpha-\beta)\left[\left\{(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta\right\}^2-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta\left\{(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta\right\}\right]$　$\alpha\beta=1$ より

$=k\left\{(k^2+2)^2-1+k^2+2\right\}=k(k^4+5k^2+5)$ ・・・③ $=11$　因数分解して

$(k-1)(k^4+k^3+6k^2+6k+11)=0$　　第 2 項は実数解を持たないから

$k=\alpha-\beta=1$　　　　　　（答） $\alpha\beta=1,\alpha-\beta-1=0$

(3) $\alpha^5\beta^5=\dfrac{1}{4}\left\{(k^4+3k^2+1)^2(k^2+4)-(k^5+5k^3+5k)^2\right\}=\dfrac{1}{4}\times4=1$

∵ $\{\ \}$ 内第 1 項＝$(k^8+6k^6+11k^4+6k^2+1)(k^2+4)$

＝$k^{10}+10k^8+35k^6+50k^4+25k^2+4$　・・・④

同 第 2 項＝$k^{10}+10k^8+35k^6+50k^4+25k^2$　・・・⑤

$$\alpha^5-\beta^5=\frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha^5\beta^5}=\frac{1}{\beta^5}-\frac{1}{\alpha^5}=\frac{2}{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}-(k^5+5k^3+5k)}$$

$$-\frac{2}{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}+(k^5+5k^3+5k)}$$ 分母の積＝４より

$$=\frac{1}{2}\left\{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}+(k^5+5k^3+5k)-(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}+(k^5+5k^3+5k)\right\}$$

$=k(k^4+5k^2+5)$　　これを利用して α,β を求める。$(\alpha>\beta>0)$

$\alpha^5\beta^5=1,\alpha^5-\beta^5=k(k^4+5k^2+5)$ より　$\alpha^{10}-(k^5+5k^3+5k)\alpha^5-1=0$

$$\alpha^5=\frac{(k^5+5k^3+5k)+\sqrt{(k^5+5k^3+5k)^2+4}}{2}=\frac{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}+(k^5+5k^3+5k)}{2}$$

$$\beta^5=\frac{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}-(k^5+5k^3+5k)}{2}$$ (④、⑤参照)　これらから①、②を得る。

注)（１）の③からも同じ式が出てくる。これを使ってもよい。

ここで　証明された①,②に $k=1,2,3,\cdots$ を代入して

$$\alpha_1-\beta_1=\left(\frac{5\sqrt{5}+11}{2}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^{\frac{1}{5}}=1$$ $k=1$ のとき

$$\alpha_2-\beta_2=\left(\frac{29\sqrt{8}+82}{2}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(\frac{29\sqrt{8}-82}{2}\right)^{\frac{1}{5}}=2$$ $k=2$ のとき

$$\alpha_3-\beta_3=\left(\frac{109\sqrt{13}+393}{2}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(\frac{109\sqrt{13}-393}{2}\right)^{\frac{1}{5}}=3$$ $k=3$ のとき

:

α,β の差が自然数になるのは 各々の５乗根が開かれ、(　　) 内の平方根が消えるためと考えるのが自然と思われる。因みに数値計算では

$$\alpha_1-\beta_1=11.0901699^{\frac{1}{5}}-0.0901699^{\frac{1}{5}}=1.6180339-0.6180339=1$$

$$\alpha_2-\beta_2=82.012193^{\frac{1}{5}}-0.012193^{\frac{1}{5}}=2.4142135-0.4142135=2$$

以下、具体的に検証していこう。

・$\alpha-\beta=1,\alpha\beta=1$ のとき　$\alpha^2-\alpha-1=0$ から　$\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\left(\frac{5\sqrt{5}+11}{2}\right)^{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ と仮定して 右辺を５乗する。

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}(25\sqrt{5}+5\cdot25+10\cdot5\sqrt{5}+10\cdot5+5\sqrt{5}+1)=\frac{1}{32}(176+80\sqrt{5})$$

$=\frac{5\sqrt{5}+11}{2}$　よって仮定は成り立つ。　$\left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ も同様に成立する。

・$\alpha-\beta=2, \alpha\beta=1$ のとき　$\alpha^2-2\alpha-1=0$ から　$\alpha=\sqrt{2}+1, \beta=\sqrt{2}-1$

仮定から　$(\dfrac{29\sqrt{8}+82}{2})^{\frac{1}{5}}=\sqrt{2}+1$　　右辺を 5 乗して

$(\sqrt{2}+1)^5=(3+2\sqrt{2})^2(\sqrt{2}+1)=(17+12\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)=29\sqrt{2}+41$

$2(29\sqrt{2}+41)=29\sqrt{8}+82$　よって仮定は成り立つ。$(\dfrac{29\sqrt{8}-82}{2})^{\frac{1}{5}}=\sqrt{2}-1$ も同様

・$\alpha-\beta=3, \alpha\beta=1$ のとき　$\alpha^2-3\alpha-1=0$ から　$\alpha=\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}, \beta=\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

仮定から　$(\dfrac{\sqrt{13}+3}{2})^5=\dfrac{1}{32}(22+6\sqrt{13})^2(3+\sqrt{13})=\dfrac{1}{4}(119+33\sqrt{13})(3+\sqrt{13})$

$=\dfrac{109\sqrt{13}+393}{2}$　　同様に　$(\dfrac{109\sqrt{13}\pm 393}{2})^{\frac{1}{5}}=\dfrac{\sqrt{13}\pm 3}{2}$（複号同順)が成り立つ。

・$\alpha-\beta=k, \alpha\beta=1$ のとき　$\alpha^2-k\alpha-1=0$ から　$\alpha=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}, \beta=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$

$$\alpha^5=\frac{1}{32}(2k^2+4+2k\sqrt{k^2+4})^2(k+\sqrt{k^2+4})=\frac{1}{4}\left\{k^4+4k^2+2+k(k^2+2)\sqrt{k^2+4}\right\}$$

$$\times(k+\sqrt{k^2+4})=\frac{1}{2}\left\{(k^5+5k^3+5k)+(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}\right\}$$

同様に　β^5　も成立する。

従って

$$\sqrt[5]{\frac{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}+(k^5+5k^3+5k)}{2}}=\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2} \quad \cdot\cdot\cdot ⑥$$

$$\sqrt[5]{\frac{(k^4+3k^2+1)\sqrt{k^2+4}-(k^5+5k^3+5k)}{2}}=\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2} \quad \cdot\cdot\cdot ⑦$$

の面白い関係が得られる。

西山先生によると　$\alpha-\beta=k, \alpha\beta=1$ で n 乗根のときの①，②の式が求められ、$n=4$　のときの α, β　は次の通り,とのこと。

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{(k^3+2k)\sqrt{k^2+4}+(k^4+4k^2+2)}{2}} \qquad \beta=\sqrt[4]{\frac{-(k^3+2k)\sqrt{k^2+4}+(k^4+4k^2+2)}{2}}$$

で与えられ、これを用いると $\alpha=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ 、$\beta=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$ より

$$\alpha^4=\frac{1}{16}(2k^2+4+2k\sqrt{k^2+4})^2=\frac{1}{4}\left\{k^2(k^2+4)+(k^2+2)^2\right.$$

$+2k(k^2+2)\sqrt{k^2+4}\Big\} = \dfrac{1}{2}\Big\{(k^4+4k^2+2)+(k^3+2k)\sqrt{k^2+4}\Big\}$　β^4 も同様に求められる。

$\sqrt[4]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$　また $n=3$ の場合 $(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})^3 = 2+\sqrt{5}$，

$(\sqrt{2}+1)^3 = 7+5\sqrt{2}$ より　$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$，　$\sqrt{2}+1 = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$　など・・。

以上を纏めて

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} = \cdots$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}} = \sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} = \cdots \qquad \cdots ⑧$$

$$\sqrt{2}+1 = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt[5]{41+29\sqrt{2}} = \sqrt[6]{99+70\sqrt{2}} = \cdots$$

:　　　　　　　　　　:

⑧により冪根ごとの無理数列の相等が推定されるが、興味深いと思う。

以　上

【参考資料】

1.　初等数学第 92 号　p74～75「第 91 号に関連して」(西山 輝夫氏)　一部抜粋

「On an article of Vol. 91, which appeared in Vol. 92」

2022.04.13.提出　　札幌市中央区北 1 条東 3 丁目 2-2-1406

村 田　洋一　　e-mail：y-murata-yh@nifty.com