私の数学散歩道(43)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　村田　洋一

デカルトの葉線からの無理数の相等ほか(関連)

前回 デカルトの葉状曲線の極大点を通り対称線に直交する直線の他方の交点の特徴から

$\sqrt[3]{4}-\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-4}=\sqrt[3]{2}$ ・・・①　　$\sqrt[3]{2}+\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-4}=\sqrt[3]{4}$ ・・・② を得たが

これまで $x^3+y^3=3xy$ に限り 係数が変わると別の無理数の相等が出てくると考えていた。

しかし $x^3+y^3=nxy$（$n=3,4,$・・ の整数)・・・③ の一般の場合を考えても ①、②の基本構成や基本方程式が変化しない事が分かった。

更に③で $n=4$ のとき $(x,y)=(3^{\frac{1}{3}},3^{\frac{2}{3}})$ は自明な解である。この点を通り対称線 $y=x$ に直交する直線は $y=-x+m+m^2(m=\sqrt[3]{3})$ これを $x^3+y^3=4xy$ に代入し整理すると

$x^2-(m+m^2)x+\dfrac{(m+m^2)^3}{3m^2+3m+4}=0$　　第 3 項＝$\dfrac{3(3m^2+3m+4)}{3m^2+3m+4}=3($分母$\neq 0)$

従って基本方程式は $x^2-(m+m^2)x+3=0$　これから $x=\dfrac{(m^2+m)\pm\sqrt{m^2+3m-6}}{2}$

$m=\sqrt[3]{3}$ だから　$\sqrt[3]{9}-\sqrt{\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}-6}=\sqrt[3]{3}$　　$\sqrt[3]{3}+\sqrt{\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}-6}=\sqrt[3]{9}$

一般的に $n=k$ のとき $(x,y)=(\sqrt[3]{k-1},\sqrt[3]{(k-1)^2})$ は自明な解であり、多くの無理数の相等が得られる,と考えている。他にも 興味ある事実が見つかれば別途報告したい。

またデカルトの葉線から離れるが、次数を上げ $x^4+y^4=4xy,\ \ x^5+y^5=5xy$ とした場合は、各々の y を消去した 4 次方程式は極大点の両座標の 2 解以外は複素解となり、グラフを見れば分かるが 上記①、②のような関係式を求められない。

数式操作の遊びに近くなるが、 以下それを示そう。

1.　$f=x^3-nxy+y^3=0$（$n=3,4,$・・ の整数）の場合

(1) 曲線概形

$f_x=3x^2-ny,\ f_{xx}=6x,\ f_y=3y^2-nx$　$f=f_x=0$ より $y=3x^2/n$　$x^3(27x^3-2n^3)=0$

$x = \dfrac{1}{3} n \cdot 2^{\frac{1}{3}}$　$y = \dfrac{1}{3} n \cdot \ 2^{\frac{2}{3}}$　また $f(x, y) = f(y, x)$ よりグラフは $y = x$ を対称線に持つ。

対称線と f の交点は $(0,0), (\dfrac{3}{2}n, \dfrac{3}{2}n)$　ここで原点の性質を調べよう。

$(0,0)$ に対し f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} のすべてが 0 でなく　$f_{xy} = -n \neq 0$ より原点は２重点, かつ

$\Delta = \left[f_{xy}{}^2 - f_{xx} f_{yy} \right]_{x=0, y=0} = n^2 > 0$ より結節点。また $-f_{xx} \big/ f_y = -6x \big/ (3y^2 - nx)$

$= -\dfrac{3}{2} n < 0$　で（$\dfrac{1}{3} n \cdot 2^{\frac{1}{3}}, \dfrac{1}{3} n \cdot \ 2^{\frac{2}{3}}$）は極大値を与える。

(2) 極大点 P($\dfrac{1}{3} n \cdot 2^{\frac{1}{3}}, \dfrac{1}{3} n \cdot 2^{\frac{2}{3}}$)を通り対称線に直交する直線等

$y = -x + \dfrac{n}{3}(m + m^2)$（但し $2^{\frac{1}{3}} = m$）　これを $f = x^3 - nxy + y^3 = 0$ と連立させて

$x^3 + nx\left\{x - \dfrac{n}{3}(m^2 + m)\right\} - \left\{x - \dfrac{n}{3}(m^2 + m)\right\}^3 = 0$　　これを整理して

$27(m^2 + m + 1)x^2 - 9n(m^2 + m)(m^2 + m + 1)x + n^2(m^2 + m)^3 = 0$　$m^2 + m + 1(\neq 0)$ で割り

定数項＝$\dfrac{n^2(m^2 + m)^3}{m^2 + m + 1} = \dfrac{m^3 n^2 (m^3 + 3m^2 + 3m + 1)}{m^2 + m + 1} = \dfrac{6n^2(m^2 + m + 1)}{m^2 + m + 1} = 6n^2$

求める２次方程式は　$9x^2 - 3n(2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}})x + 2n^2 = 0$（以下 基本方程式 とする）より

$x = \dfrac{n}{6}((\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \pm \sqrt{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 4}) = \dfrac{n}{6} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$ (複号（＋）)、　$\dfrac{n}{3} \cdot \ 2^{\frac{1}{3}}$（同（―））

これから n の値に関係なく上記①、②が得られる。

因みに当方で別途確認済の $n = 6$ の時 基本方程式は　$x^2 - 2(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})x + 8 = 0$ で $n = 3$ の時と同じ結果が得られた。

2.　$x^4 - 4xy + y^4 = 0,$　$x^5 - 5xy + y^5 = 0$　とした場合

2-1.　$x^4 - 4xy + y^4 = 0$ の場合

(1) 曲線概形　$f_x = 4(x^3 - y), f_{xx} = 12x^2, f_y = 4(y^3 - x)$　$f = f_x = 0$ より $y = x^3$、$x^4(x^8 - 3) = 0$

これから極大点、極小点の候補は $x = \pm 3^{\frac{1}{8}}$,　$y = \pm 3^{\frac{3}{8}}$　また $f(x, y) = f(y, x)$ よりグラフは $y = x$ を対称線に持つ。対称線と f の交点は $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ と 2 重点、結節点の $(0,0)$。

また $f(x, y) = f(-x, -y)$ よりグラフは原点対称。　更に $4xy = x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$ から

$xy(xy-2) \le 0$　f は 第 1 象限では $xy \le 2$ で対称線 $y = x$ を囲む曲線、第 3 象限では $xy \ge 2$ で対称線 $y = x$ を囲む曲線を合わせたグラフになる。

念のため、$x^4 + y^4 = 4xy \ge 0$ より x, y は同符号で、第 2,4 象限にグラフは出てこない。

複号が正の時、$-f_{xx} / f_y = -12x^2 / 4(y^3 - x)$ より $-12 \cdot 3^{\frac{1}{4}} / 4(3 \cdot 3^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}) = -\dfrac{3}{2} \cdot 3^{\frac{1}{8}} < 0$

負の時 $\dfrac{3}{2} \cdot 3^{\frac{1}{8}} > 0$ で各々極大点 (P) 、極小点を取る。

<u>(2) 求める直線等</u>　　P を通り対称線に直交する直線は $y = -x + m$（但し $3^{\frac{1}{8}} + 3^{\frac{3}{8}} = m$）

f と連立させて　$x^4 + 4x(x-m) + (x-m)^4 = 0$　　これを整理して

$2x^4 - 4mx^3 + 2(3m^2+2)x^2 - 4(m^3+m)x + m^4 = 0$　$3^{\frac{1}{8}} = a$ として m を a の式で表すと

$m = a + a^3$　$2(3m^2+2) = 6(a+a^3)^2 + 4$　　$-4(m^3+m) = -4(a+a^3)^3 - 4(a+a^3) = -4(3a^7$
$+3a^5 + 2a^3 + 4a)$　（次数を 7 次以下に整理、$a^8 = 3, a^9 = 3a$ などと置き換える。）

$m^4 = (a+a^3)^4 = a^4(a^2+1)^4 = a^4(a^8 + 4a^6 + 6a^4 + 4a^2 + 1) = 2(2a^6 + 2a^4 + 6a^2 + 9)$
$= 2a^4(2a^6 + 3a^4 + 2a^2 + 2)$　　　　従って求める 4 次方程式は

$$x^4 - 2(a^3+a)x^3 + (3a^6 + 6a^4 + 3a^2 + 2)x^2$$
$$-2(3a^7 + 3a^5 + 2a^3 + 4a)x + a^4(2a^6 + 3a^4 + 2a^2 + 2) = 0$$

この方程式の 4 解の中に a, a^3 が含まれるから

左辺を $f(x)$ として　$f(a) = a^4 - 2(a+a^3)a^3 + (3a^6 + 6a^4 + 3a^2 + 2)a^2 - 2(3a^7 + 3a^5$
$+2a^3 + 4a)a + (2a^6 + 2a^4 + 6a^2 + 9) = 0$　（∵　$a^6 . a^4, a^2$、定数項 ごとに係数を計算するとすべて 0 になる。）同様に $f(a^3) = a^{12} - 2(a+a^3)a^9 + (3a^6 + 6a^4 + 3a^2 + 2)a^6 - 2(3a^7 + 3a^5$
$+2a^3 + 4a)a^3 + (2a^6 + 2a^4 + 6a^2 + 9) = 0$　（∵ 同上）

$f(x)$ は因数定理により $(x-a)(x-a^3) = x^2 - (a+a^3)x + a^4$ で割り切れるから、割り算を実行して　$f(x) = (x-a)(x-a^3)\left\{x^2 - (a+a^3)x + (2a^6 + 3a^4 + 2a^2 + 2)\right\} = 0$

ここで　$x = a, a^3$ 以外の無理数の相等を示す式が 右辺第 3 項の二次方程式から得られるかどうか、判別式を調べてみよう。$(a = 3^{\frac{1}{8}} > 0)$

$D = (a^3+a)^2 - 4(2a^6 + 3a^4 + 2a^2 + 2) = -(7a^6 + 10a^4 + 7a^2 + 8) < 0$ で、うまくいかない。

2-2.　$x^5 - 5xy + y^5 = 0$ の場合

ほぼ 2-1.と同じ考え方で解くのでポイントのみ記載する

<u>(1)曲線概形</u>　$f = f_x = 0$ より $y = x^4$ 、$x^5(x^{15} - 4) = 0$ 極大点、極小点の候補は $x = 4^{\frac{1}{15}}, y = 4^{\frac{4}{15}}$

また $f(x,y) = f(y,x)$ よりグラフは $y = x$ を対称線に持ち、第一象限ではそれを囲む曲線。

対称線との交点は$(0,0),((\frac{5}{2})^{\frac{1}{3}},(\frac{5}{2})^{\frac{1}{3}})$ 原点は2重点かつ結節点。f より $1+(\frac{y}{x})^5=\frac{5y}{x^4}$

これから　$\alpha=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=-1$ から　漸近線の傾き$\alpha=-1$　切片をβ とすると

$$\beta=\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5xy}{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}=5\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{y}{x^3}}{1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^4}{x^4}}=0$$

漸近線は$y=-x$ で原点を通る。$x<0,y<0$の時 $x^5+y^5\neq 5xy$ （両辺の符号に注意）。
$x<0,y>0$　$x>0,y<0$の時　$(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=x^5+y^5=5xy<0$
この条件の時 $x^4-x^3y+x^2y^2-x^3y+y^4>0$　従って $x+y<0$　これから第2,4象限で
曲線は漸近線に対し下側に存在する。

$-f_{xx}/f_y=-20x^3/5(y^4-x)$ より $-20\cdot 4^{\frac{4}{15}}/4(3\cdot 3^{\frac{16}{15}}-3^{\frac{1}{15}})=-\frac{5}{8}\cdot 4^{\frac{1}{5}}<0$ よりこの点で

極大点(P) を取る。

(2) 求める直線等　Pを通り対称線に直交する直線は　$y=-x+m$（但し$4^{\frac{1}{15}}+4^{\frac{4}{15}}=m$）

f と連立させて　$x^5+5x(x-m)-(x-m)^5=0$

$5mx^4-10m^2x^3+5(2m^3+1)x^2-5(m^4+m)x+m^5=0$　項別に$a=4^{\frac{1}{15}}$ として整理して

$5m=5a(a^3+1)$　$-10m^2=-10a^2(a^6+2a^3+1)$　$10m^3+5=5(2a^{12}+6a^9+6a^6+2a^3+1)$
$-5(m^4+m)=-5a(4a^{12}+6a^9+4a^6+2a^3+5)$　$m^5=5a^5(a^{12}+2a^9+2a^6+a^3+1)$

求める4次方程式は　$a(a^3+1)x^4-2a^2(a^3+1)^2x^3+(2a^{12}+6a^9+6a^6+2a^3+1)x^2$
$-a(4a^{12}+6a^9+4a^6+2a^3+5)x+a^5(a^{12}+2a^9+2a^6+a^3+1)=0$

4個の解にa,a^4 が含まれるから各々上の 4 次方程式に代入、確認する。（計算略）
方程式を$(x-a)(x-a^4)=x^2-(a+a^4)x+a^5$ で割って
商は　$a(a^3+1)x^2-a^2(a^3+1)^2x+(a^{12}+2a^9+2a^6+a^3+1)=0$
2-1.同様に判別式を見ると

$$D=a(a^3+1)\left\{a^3(a^3+1)^3-4(a^{12}+2a^9+2a^6+a^3+1)\right\}=-a(a^3+1)$$

$\times(3a^{12}+5a^9+5a^6+3a^3+4)<0$　（$\because a=\sqrt[15]{4}>0$ ）でうまくいかない。

以　上

【参考資料】

1.　共立出版（株）　詳解　微積分演習Ⅱ

2022.1.5.提出　札幌市中央区北1条東3丁目2-2-1406
村田　洋一　e-mail：y-murata-yh@nifty.com