私の数学散歩道(42)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　村田　洋一

デカルトの葉線からの無理数の相等ほか

今回 マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブックを見ていて デカルトの葉状曲線（葉形）の公式

1. 直交座標での方程式　$x^3+y^3=3axy$
2. 媒介変数方程式　$x=3at/(1+t^3), y=3at^2/(1+t^3)$
3. 漸近線の方程式　$x+y+a=0$
4. 葉線で囲まれた領域の面積　$3/2a^2$

に興味をひかれた。本稿では議論の簡単化のため $a=1$ とし、またこの曲線を描く描画ソフトを持っていないため、グラフなしでの投稿をご了解ください。

グラフの形は以前見て知っていたが、極値を取る座標が存在するか？また曲線の概形、特徴から極値を通り曲線の対称線に直交する直線の他の交点の座標はどうなるかを調べる中で

$$\sqrt[3]{4}-\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-4}=\sqrt[3]{2}\quad\cdots①\qquad \sqrt[3]{2}+\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-4}=\sqrt[3]{4}\quad\cdots②$$

になる筈という結論になった。

このような無理数の組合せの和・差がまた無理数 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ になるのは不思議な感じがする。本稿の前半はデカルトの葉線の一般の話で後半は主題の①、②を導く。本稿では葉線に限ったが、他にも特殊平面曲線はいくつもある。関数の与え方により、無理数間の興味ある関係が出てくるとも考えられる。

１．デカルトの葉線について

(1) 直交座標では $x^3+y^3=3xy$ で　極座標では $r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta=3r^2\sin\theta\cos\theta$ から

$r=3\sin\theta\cos\theta/(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$

$f(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$ と置くと $f(x,y)=f(y,x)$ でグラフは $y=x$ について対称。

対称線と葉線の交点は $f(x,x)=2x^3-3x^2=x^2(2x-3)=0$ より $(0,0),(3/2,3/2)$ 、対称線と漸近線の交点は $y=-x-1$ と $y=x$ より $(-1/2,-1/2)$ 、漸近線の x 軸との交点 $(-1,0)$

なお、原点 $(0,0)$ を結節点といい、曲線は葉の形をし $y=x$ を対称線、葉元を原点とする。

極値をとるのは第一象限のループで、原点から各々正負の方向に漸近線に近づいていていく。

(2) 媒介変数方程式は　$x=3t/(1+t^3), y=3t^2/(1+t^3)$ でこれが成り立つのは

$f(x,y)=27t^3/(1+t^3)^3-27t^3/(1+t^3)^2+27t^6/(1+t^3)^3$

分母を $(1+t^3)^3$ に統一して　分子＝ $27t^3-27t^3(1+t^3)+27t^6=0$ より。

(3) 漸近線の方程式は　$x+y+1=0$

$x^3+y^3+1-3xy=1$ として左辺を因数分解　$(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)=1$

$$(x+y+1)\left\{(x-y)^2+(y-1)^2+(1-x)^{\ 2}\right\}=2$$

x の絶対値を大きくすると第 2 項は限りなく大きくなり、右辺の 2 は定数で $x+y+1$ は 0 に限りなく近づき漸近線になる。

（4）葉線で囲まれた領域の面積

$f(x,y)=0$ を y の関数とみてカルダノの公式を使って

$$y=\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-x^3}}-\sqrt[3]{\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-x^3}}\ ,\ s\omega+t\omega^2,\ s\omega^2+t\omega$$ となるが、このままでは

（但し s,t は各々 y の第 1，2 項； ω は虚数単位）

積分範囲も決められず、関数そのものも変換等で有理積分に帰着できないと思われる。

（公式のチェック：最初の解で）

$$y^3=(s-t)^3=s^3-t^3-3st(s-t)=\left(-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-x^3}\right)-\left(\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-x^3}\right)$$

$$-3\sqrt[3]{\left(\frac{x^6}{4}-x^3\right)\ -\frac{x^6}{4}}(s-t)=-x^3+3xy\qquad\therefore\ x^3-3xy+y^3=0$$

そこで 極座標表示の面積公式　$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\theta$ から　$S=\dfrac{9}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta$

$$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+2\tan^3\theta+\tan^6\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{9}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt=\frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3(t^3+1)}\right]_0^{\infty}=\frac{3}{2}$$

（分母・子を $\cos^6\theta$ で割り、$\tan\theta=t$ 、$dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ 　積分範囲は $0\to\dfrac{\pi}{2}$ から

$0\to\infty$ へ　　$\dfrac{d}{dt}\left[-\dfrac{1}{3(t^3+1)}\right]=\dfrac{-(-1)9t^2}{9(t^3+1)^2}=\dfrac{t^2}{(1+t^3)^2}$ は重要。）

⑸ 極値をとる座標は？

陰関数の定理より、$f(x,y)=0$ で定まる $y=\varphi(x)$ の極値を求めるには $f=0, f_x=0$ を満たす (x_i,y_i) を求め、これに対し $-f_{xx}(x_i,y_i)/f_y(x_i,y_i)$ が正なら y_i は極小値、負なら極大値であるから

$$f=x^3-3xy+y^3=0\quad\cdot\cdot\cdot③\qquad f_x=3x^2-3y=0\quad\cdot\cdot\cdot④$$

④より $y=x^2$ 　③に代入して　$x^3-3x^3+x^6=0$ から 候補の座標は $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$　　$f_y\neq0$

$$-f_{xx}(x_i,y_i)=-6x\qquad f_y=3y^2-3x$$

$-f_{xx}(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})/f_y(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})=-6\sqrt[3]{2}/3(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2})=-2<0$ で $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ は極大値となる。

２．極大点 $\mathrm{P}(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ を通り曲線の対称線に直交する直線が曲線と再び交わる点の座標

これは対称の性質 $f(x,y)=f(y,x)$ から交点は $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}),\ (\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ となるが確認する。

$x^3-3xy+y^3=0$ ・・・⑤　直線の方程式は極大点を通るから　$y=-x+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ ・・・⑥

⑥を⑤に代入して　$x^3-3x(-x+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-x)^3=0$

整理して辺々 $(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ で割り　$x^2-\{(4+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4})/(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\}x+2=0$ ・・・⑦

⑦の第２項中括弧内＝$2+\dfrac{\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=2+\dfrac{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}+2)}{\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}=2+\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2}{2-1}$

$=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　　よって⑦式は　$x^2-(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})x+2=0$ ・・・⑧

⑧の判別式は　$D=(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^2-8=2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-4=0.10724>0$ より　実数解２個を持つ。

⑧の実数解　$x=\dfrac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\pm\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-4}}{2}$　ここで複号（—）の解は極大点 P を通るから

$\sqrt[3]{4}-\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-4}=\sqrt[3]{2}$ ・・・①　でなければならない。

これを示してみよう。①式で $\sqrt[3]{2}=a$（＝1.25992）と仮定して

$a^2-\sqrt{2a+a^2-4}=a$　$a^2-a=\sqrt{2a+a^2-4}$　a は正の実数だから

$a>1,\ \ a>-1+\sqrt{5}=1.23606$ 平方して整理すると　$a^4-2a^3-2a+4=0$

因数分解して　$(a^3-2)(a-2)=0$　条件と合わせて　$a=\sqrt[3]{2}$　で①式はなりたつ。

もう一つの解は数値で具体的に示しておこう。

$\sqrt[3]{2}+\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-4}=1.25992+\sqrt{0.10724}=1.58739=\sqrt[3]{4}$　で②式もなりたつ。

従って求める交点は　$(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}),\ (\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$　となり一致する。　　以　上

【参考資料】

1. オーム社出版局　　マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック
2. 共立出版（株）　　詳解　微積分演習Ⅱ