私の数学散歩道(41)　　数実研会員　村田　洋一

「はやぶさ」の軌道計算に有効な円周率の精度は？・・

今回　πを与える幾つかの公式、　二次関数のグラフ、三次の連立方程式、の 3 つのテーマを選び気付き事項をまとめた。ほんの些細なことであるが、問題のアプローチの仕方で、簡単に解ける　or 面倒になることがある。その例を考えてみた。なお、本文中の[　]は文末の出典番号を示す。

1.「はやぶさ」の軌道計算に有効なπを得るのはどの円周率公式？

惑星探査機「はやぶさ」は、計画の途中で通信が途絶えてしまったものの、通信を復活でき見事に地球に帰還した。その軌道計算での円周率の値は、3.14159 26535 89793(*) が使われていたらしい。
もし 円周率を 3.14　として計算していたら、軌道が最大 15 万 km もずれ、たとえ通信が復活しても地球に戻れなかった筈・・・。　［２］

πの値を直接求めるため、また級数の和を利用して求める過程で古今の数学者は血の滲む努力を重ねてきた。ここではラマヌジャン型公式３種、$\tan^{-1}$ ２項級数２種、同３項級数、和算学者 松永良弼他の公式、オイラー級数の一部、ライプニッツの円周率公式を 前 4 つは ke!san により、後ろの 2 つはコメントで上記の「はやぶさ」に必要な小数点以下 15 桁を最小の計算回数で求めるにはどの公式が良いか検討してみた。ラマヌジャン型が top！

１）ラマヌジャン型公式　　1）～４）の公式は［３］

(1) $$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{99^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(4^n n!)^4}\frac{1103+26390n}{99^{4n}}$$ (ラマヌジャン 1914)　・・・①

(2) $$\frac{4}{\pi}=\frac{1}{882}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n)!}{(4^n n!)^4}\frac{1123+21460n}{882^{2n}}$$ (ラマヌジャン 2 1914)　・・・②

(3) $$\frac{1}{\pi}=12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!}{(3n)!(n!)^3}\frac{13591409+545140134n}{(640320^3)^{n+\frac{1}{2}}}$$ (チェドノフスキー　1987)・・③

よくもまあこの様な公式を思いついたものである。(1)は１回、(2)は２回、(3)は１回の計算で(*)に一致した。この級数ばかりではないが、1～2 回のレベルでも手計算でやるとなると小数点以下の四捨五入で誤差が出てくるため、同何桁までの数字が有効なのか判断に迷う。

２）$\tan^{-1}$ ２項級数

(1) $$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$$ (マチン　1706)　・・・④

(2) $$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$ (ハットン　1776)　・・・⑤

２）は勿論、３）も残りの公式と違い無限級数の形で表わされていない。一見通常の等式であるが、

$\tan^{-1} x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{7}x^7 + \cdot\cdot\cdot$ で無限級数表示とおなじものである。

④は 11 回、⑤は 15 回の計算で(*)に一致する。

３） $\tan^{-1}$ 3 項級数

(1) $\dfrac{\pi}{4} = 8\tan^{-1}\dfrac{1}{10} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239} - 4\tan^{-1}\dfrac{1}{515}$ （クリゲンシェルナ　1730）・・・⑥

⑥は 8 回の計算で一致する。

４）和算学者の公式

(1) $\dfrac{\pi}{3} = 1 + \dfrac{1^2}{4\cdot6} + \dfrac{1^2 3^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10} + \dfrac{1^2 3^2 5^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14} + \cdot\cdot\cdot$ （松永良弼　1739）　・・・⑦

(2) $\dfrac{\pi^2}{9} = 1 + \dfrac{1^2}{3\cdot4} + \dfrac{1^2 2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \dfrac{1^2 2^2 3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \cdot\cdot\cdot$ （建部賢弘　1722）　・・・⑧

⑦、⑧は共に 22 回の計算で一致する。日本の和算家の実力も大したものである。

５）　オイラーの公式　［４］

(1) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdot\cdot\cdot = \dfrac{\pi^2}{6}$ （オイラー　1734）・・・⑨

(2) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \dfrac{1}{9^2} + \cdot\cdot\cdot = \dfrac{\pi^2}{8}$ （奇数項の和）・・・⑩

(3) $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{8^2} + \dfrac{1}{10^2} + \cdot\cdot\cdot = \dfrac{\pi^2}{24}$ （偶数項の和）・・・⑪

⑨～⑪の回数は不明、手計算ではやる気がしない。⑨は例えば 1 から 25 まで計算すると

$\dfrac{\pi^2}{6} = 1.64493$　$\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdot\cdot\cdot + \dfrac{1}{25^2} = 1.60564$ でまだ相当の項(回)数が必要。

６）ライプニッツの円周率公式　［２］

$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdot\cdot\cdot = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ ・・・⑫

500 番目の数まで計算しても小数点以下 3 桁までしか一致しない収束が遅い級数

2．2 次方程式 $5x^2 + (k-10)x + 3 = 0$ が x より小さい解と $k+1$ より大きな解をもつような定数 k の範囲を求めよ。　(2020/4/10)　［１］

解１．　通常　左辺＝ $f(x)$ として そのグラフを考え y 軸の値に着目し

$f(k) < 0$ かつ $f(k+1) < 0$ を考える。

$f(k+1) = 6k^2 - 10k + 3 < 0$ から $\dfrac{5-\sqrt{7}}{6} < k < \dfrac{5+\sqrt{7}}{6}$

$f(k+1) = 6k^2 + k - 2 = (2k-1)(3k+2) < 0$ より $-\dfrac{2}{3} < k < \dfrac{1}{2}$

共通部分をとって $\dfrac{5-\sqrt{7}}{6} = 0.39 < \dfrac{1}{2}$ から $\dfrac{5-\sqrt{7}}{6} < k < \dfrac{1}{2}$ ・・・(答)

解 2. 解 1.を思いつかなかった場合 $f(x)=0$ として、x 軸に着目しそれぞれの解と $k, k+1$ の大小を考える。大きな解が $k+1$ より大きいから、また小さな解が k より小さいから

$$\frac{10-k+\sqrt{k^2-20k+40}}{10}>k+1 \text{ より } \quad 6k^2+k-2<0 \quad -\frac{2}{3}<k<\frac{1}{2}$$

$$\frac{10-k-\sqrt{k^2-20k+40}}{10}<k \text{ より } \sqrt{k^2-20k+40}>10-11k \quad 6k^2-10k+3<0$$

から $\dfrac{5-\sqrt{7}}{6}<k<\dfrac{5+\sqrt{7}}{6}$ で①と同様の(答)を得るが、②の場合計算がやや複雑になる。

3. 次の 3 元 3 次連立方程式の実数解の組を求めよ。 (自作)

$x+y+z=2$ ・・・① $x^2+y^2-z^2=4$・・・② $x^3+y^3+8z^3=1$・・・③

解 1. ①より $x=2-y-z$ これを③に代入し x を消去 $(2-y-z)^3+y^3+8z^3=1$

$(y+z)^3-y^3-8z^3-6(y+z)^2+12(y+z)-7=0$

$3y^2(z-2)+3y(z-2)^2-(7z^3+6z^2-12z+7)=0$・・・④

同様に②にも代入して正攻法でいく。 $(2-y-z)^2+y^2-z^2-4=0$

$y^2+(z-2)y-2z=0$ $(y-2)(y+z)=0$

1）$y=2$ の時 ①より $x+z=0$ $x=-z$ $y=2$ を③に代入して $7z^3=-7$

$z=-1$ $x=1$ 従って $(x,y,z)=(1,2,-1)$

2） $y=-z$ の時 ①より $x=2$ $y=-z$ を④へ代入

$3z^2(z-2)-3z(z-2)^2-(7z^3+6z^2-12z+7)=0$ 整理して $7z^3+7=0$ $z=-1$

$y=1$ 従って $(x,y,z)=(2,1,-1)$ 纏めて $(x,y,z)=(1,2,-1)$,(2,1,-1)

解 2 ①より $x=2-y-z$ これを②に代入し x を消去

. 解 1. より $(y-2)(y+z)=0$

1） $y=2$ の時 ①より $x+z=0$ $x=-z$ $y=2$ を③に代入して $7z^3=-7$

$z=-1$ $x=1$ 従って $(x,y,z)=(1,2,-1)$

2） $y=-z$ の時 ①より $x=2$ $y=-z$ を③に代入 整理して $7z^3+7=0$ $z=-1$

$y=1$ 従って $(x,y,z)=(2,1,-1)$

方程式①～③の $x+y, x^2+y^2, x^3+y^3$ は和であり、交換しても構わない。

解 2.の 1）で $(x,y,z)=(1,2,-1)$ が解なら $(2,1,-1)$ も解 $(x,y,z)=(1,2,-1)$,(2,1,-1) (答)

解 2 の方が簡単、④を計算する必要がない。③を利用

(参考資料) 以 上

［1］ 繁木伸孝 2020 コロナ備忘録 初等数学 89 号 問題 5、 解 2 は筆者による

［2］ 永野裕之 ダイヤモンド社「とてつもない数学」第 5 章、第 2 章

［3］ ke!san：高精度計算サイト

［4］ YEO.エイドリアン 青土社 「π と e の話」

2021.01.13. 札幌市中央区北 1 条東 3 丁目 2-2-1406

村田洋一 E-mail y-murata-yh@nifty.com