私の数学散歩道(40)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　　村田　洋一

実数解１個と二次式の根号３個を持つ無理方程式の解法

今回 根号の中が二次式で３個の規則性がある、項数４の無理方程式１.を資料（１）で見つけた。これは見かけ以上に簡単に、右辺の２個の根号を入れ替えても実数解を見つけることができた。

これにヒントを得て二次で３個の規則性がない、項数４の１個の実数解を持つ無理方程式 2.ではどうなるか確認を試みた。一般的な証明にはならないが、式の展開の複雑さは別にしても上記同様の入れ替えでも実数解を見つけることができた。2-1.～2-3.とも右辺 or 左辺に二次式の根号１個を残すように式を変形していくのがポイントとなる。前回同様 高次方程式の解は ke!san によった。

なお、この式の展開・整理は大変で計算間違いをしやすい。多項式の積の展開・整理ソフト（多分あるであろうが）が欲しい、と切に思った。計算が煩雑で、冗長を避けるため記載は経緯がわかるポイントのみにとどめた。

１．次の方程式を満たす正の実数を求めよ。

(A)　　$x+\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x+2)}+\sqrt{(x+1)(x+2)}=2$　・・・①

解 1-1.　$2-x-\sqrt{(x+1)(x+2)}=\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x+2)}$　として両辺を平方

$6-4x+(2x-4)\sqrt{(x+1)(x+2)}=2x\sqrt{(x+1)(x+2)}$　　$3-2x=2\sqrt{(x+1)(x+2)}$

前式の左辺＞0 より　$0<x<\dfrac{3}{2}$　　これから $x=\dfrac{1}{24}$

解 1-2.　$2-x-\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{(x+1)(x+2)}$　より $6x-2=-6\sqrt{x(x+2)}$　右辺＜0 より

$0<x<\dfrac{1}{3}$　　これから $x=\dfrac{1}{24}$

解 1-3.　$2-x-\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x(x+2)}+\sqrt{(x+1)(x+2)}$　より　$2-8x=8\sqrt{x(x+1)}$　右辺＞0 から

$0<x<\dfrac{1}{4}$　　これから $x=\dfrac{1}{24}$　　1-1.～1-3.いずれも $\dfrac{1}{24}+\dfrac{5}{24}+\dfrac{7}{24}+\dfrac{35}{24}=\dfrac{48}{24}=2$　で成立。

2．次の方程式を満たす正の実数を求めよ。（自作）

(B)　$x+\sqrt{2x(x+1)}+\sqrt{x^2+8}-\sqrt{2x(3-x)}=4$　・・・②

[1]　　[2]　　[3]　　[4]　　　各式を[1] ～[4] と置くと

②で根号内＞0 $(x \neq 0)$ より $0 < x < 3$ ・・・(a) [1],[2]を移項して

解 2-1 $4 - x - \sqrt{2x(x+1)} = \sqrt{x^2+8} - \sqrt{6x-2x^2}$ ・・・③ 平方して整理すると

$2x^2 - 6x + 4 + (x-4)\sqrt{2x(x+1)} = -\sqrt{(x^2+8)(6x-2x^2)}$ 更に平方して

$(2x^2-6x+4)^2 + 2x(x+1)(x-4)^2 + 2(2x^2-6x+4)\sqrt{2x(x+1)} = (x^2+8)(6x-2x^2)$

左辺第 3 項を右辺に、右辺を左辺に移項し整理すると

$2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4 = -(x-1)(x-2)(x-4)\sqrt{2x(x+1)}$ 左辺を因数分解して

$(2x-1)(x-1)(x-2)^2 = -(x-1)(x-2)(x-4)\sqrt{2x(x+1)}$ これから $x = 1, 2$ が解となるが、

両辺の平方を繰り返しているから②でチェックして $x = 1$ のみ適する。

残りの解は $2x^2 - 5x + 2 = -(x-4)\sqrt{2x(x+1)}$ より 平方して整理すると

$2x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 52x + 4 = 0$

これを ke!san で解いて $x = -0.0346 \pm 2.9112i,\ 0.0789,\ 2.990$ 複素数解は勿論、実数解も

③に代入して不適で、求める解は $x = 1$ のみである。

解 2-2 $4 - x - \sqrt{x^2+8} = \sqrt{2x(x+1)} - \sqrt{6x-2x^2}$ ・・・④ [1],[3]を移項して平方、整理して

$x^2 - 8x + 12 + (x-4)\sqrt{x^2+8} = -2x\sqrt{-x^2+2x+3}$ 更に平方して

$(x^2-8x+12)^2 + (x-4)^2(x^2+8) + 2(x-4)(x^2-8x+12)\sqrt{x^2+8} = -4x^2(x^2-2x-3)$

左辺第 3 項を右辺に、右辺を左辺に移項し整理して

$3x^4 - 4x^3 + 38x^2 - 128x + 136 = -(x-2)(x-4)(x-6)\sqrt{x^2+8}$ ・・・(b)

ke!san では左辺＝0 の解はすべて複素数で、右辺との共通解がない。但し②からの $x = 1$ を

代入すると(b)は成り立つ。そこで(b)の両辺を再度平方し整理してみることにした。

$(3x^4 - 4x^3 + 38x^2 - 128x + 136)^2 = (x-2)^2(x-4)^2(x-6)^2(x^2+8)$

左辺は $9x^8 - 24x^7 + 228x^6 - 1,072x^5 + 3,300x^4 - 10,816x^3 + 26,720x^2 - 34,8116x + 18,496$

右辺 第 1・2 項×第 3・4 項=$(x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64)(x^4 - 12x^3 + 44x^2 - 96x + 288)$

$= x^8 - 24x^7 + 240x^6 - 1,344x^5 + 4944x^4 - 13,440x^3 + 27,008x^2 - 33,792x + 18,432$

整理して

$8x^8 - 12x^6 + 272x^5 - 1,644x^4 + 2,624x^3 - 288x^2 - 1,024x + 64 = 0$

$2x^8 - 3x^6 + 68x^5 - 411x^4 + 656x^3 - 72x^2 - 256x + 16 = 0$

これは $x = 1$ を解に持つ。因数分解して

$$(x-1)(2x^7+2x^6-x^5+67x^4-344x^3+312x^2+240x-16)=0$$

第２項の解は　ke!san により $x=-4.64841,-0.52760,0.06200$　正の解 0.062 も④より不適

残りの４解は　複素数解で　適する実数解は　$x=1$ のみ。

<u>解　2-3</u>　$4-x+\sqrt{2x(3-x)}=\sqrt{2x(x+1)}+\sqrt{x^2+8}$ ・・・⑤　[1],[4]を移項,両辺を平方、整理

$$\sqrt{2x(x+1)(x^2+8)}+(x-4)\sqrt{2x(3-x)}=-2(x^2+x-2)$$

左辺第２項を右辺に移項し平方、整理して

$$4(x-4)(x^2+x-2)\sqrt{2x(3-x)}=2x(x+1)(x^2+8)-2x(3-x)(x-4)^2-4(x^2+x-2)^2$$

右辺を整理して４で割ると

$$(x-4)(x+2)(x-1)\sqrt{2x(3-x)}=-7x^3+27x^2-16x-4=-(x-1)(7x^2-20x-4)$$

$x=1$ は解である。他の解は　$2x(3-x)(x-4)^2(x+1)^2=(7x^2-20x-4)^2$　より

左辺＝$-(2x^6-18x^5+40x^4+42x^3-112x^2-96x)$

右辺＝$49x^4-280x^3+344x^2+160x+160$

整理して

$$2x^6-18x^5+89x^4-238x^3+232x^2+64x+16=0$$

ke!san からこの方程式は６個の複素数解を持ち、原方程式の実数解は $x=1$ のみ。

以　上

(参考資料)

（１）　白泉社　　漫画　数学ゴールデン１　蔵丸 竜彦著

問題　$x+\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x+2)}+\sqrt{(x+1)(x+2)}=2$ が示されているのみで、解答は掲載されていない。

2020.11.20.　札幌市中央区北１条東３丁目 2-2-1406

村田　洋一　　　E-mail　y-murata-yh@nifty.com