私の数学散歩道(39)　　　　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　村田　洋一

前 回 レ ポ か ら 派 生 す る 因 数 分 解

二項式 $x^{42}-1$ の因数分解の結果から、係数の絶対値がすべて 1 の式の因数分解を考えてみました。数列状の公比 x, x^2・・, x^N の多項式や特別な三項式、その交項式を取り上げ、Q 上で因数分解できないものと簡単に因数分解できるものを除き、N の範囲を限定して調べた訳です。

尚、$x^3 \pm 1, x^5 \pm 1, x^4+x^2+1$ 等の 因数分解は既知とし記載を省き、結果の後の＊は簡単な脚注です。

1.　$(x^N + x^{N-1} +$・・・$+ x + 1)$ の形 $(N \le 20)$、公比 x ①、以下 同 x^2 を②、・・と表示

各式の前の(　)表示は項数、それが素数で因数分解不能の時や簡単な式を除き(10)から始める。

(10)　$x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$= (x+1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1) = (x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

＊平方差 $(x^4+x^2+1)^2-(x^3+x)^2 = x^8+x^6+x^4+x^2+1$ より

(12)　$x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$　　　　←x^2+x+1 で括って

$= (x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

(14)　$x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$　　　←$x+1$ で括って

$= (x+1)(x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1)$

$= (x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

＊平方差 $(x^6+x^4+x^2+1)^2-(x^5+x^3+x)^2 = x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1$ より

(15)　$x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$= (x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$

$= (x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$

＊ $(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$ は $(x^4+x^3+x^2+x+1)$ で割り切れる。　　2-③-(5)参照

$(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)$ が $(x^4-x^3+x^2-x+1)$ で割り切れるのと同様。

(16)　$x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$= (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

(18)　$x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+$・・・$+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^{16}+x^{14}+x^{12}+$

・・・$+x^4+x^2+1) = (x+1)\left\{(x^8+x^6+x^4+x^2+1)^2-(x^7+x^5+x^3+x)^2\right\}$

$= (x+1)(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$= (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$　　　　＊平方差、因数分解

(20)　$x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+$・・・$+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$= (x+1)(x^2+1)(x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1)$　　　＊平方差を 2 回

$= (x+1)(x^2+1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

$= (x+1)(x^2+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

(21)　$x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+\cdot\ \cdot\ \cdot+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$=(x^2+x+1)(x^{18}+x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$　＊散歩道(38) P.2

$=(x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\ (x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$　①関連

2．公比 x^N 、$N=$ 2〜11　$N=2$ は（5）から最高次数は 20 を目処（例外あり）に、適宜増やした。
項数が素数で因数分解不能のもの,容易なものは記載略、以下３についても同様。

(5)　$x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$　＊平方差

(6)　$x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

(7)　$x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\ (x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

(8)　$x^{14}+x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

(9)　$x^{16}+x^{14}+x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^8+x^6+x^4+x^2+1)^2-(x^7+x^5+x^3+x)^2$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$

(10)　$x^{18}+x^{16}+x^{14}+x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^2+1)(x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1)$ ＊平方差２回

$=(x^2+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^8-x^6+x^4-x^2+1)$　②関連

(5)　$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$　＊1-(15)の注

(6)　$x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$

(7)　$x^{18}+x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=$　＊散歩道(38)p2

$=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$　③関連

(3)　$x^8+x^4+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

(5)　$x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1=(x^8+x^6+x^4+x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$　＊平方差を２回

$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

(6)　$x^{20}+x^{16}+\cdot\ \cdot+x^4+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$

④関連

(3)　$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$ ＊ $x=\omega(\omega^3=1)$ を代入, $\omega^2+\omega+1=0$

(4)　$x^{15}+x^{10}+x^5+1=(x+1)(x^2+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

⑤関連

(4)　$x^{18}+x^{12}+x^6+1=(x^2+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$

(5)　$x^{24}+x^{18}+x^{12}+x^6+1=(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)$

$=\ (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)\ (x^4-x^3+x^2-x+1)$

$\times(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$　＊1-(15)の注

(7)　$x^{36}+x^{30}+x^{24}+x^{18}+x^{12}+x^6+1=(x^{18}+x^{12}+x^6+1)^2-(x^{15}+x^9+x^3)^2$

$=(x^{18}+x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)\ (x^{18}-x^{15}+x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)=(x^6+x^5+x^4+x^3$

$+x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)\ (x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$\times(x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)$　＊散歩道(38)p2

⑥関連

(3)　$x^{14}+x^7+1=(x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$　＊2-⑤-(3)参照

(4)　$x^{21}+x^{14}+x^7+1=(x^7+1)(x^{14}+1)$

$=(x+1)(x^2+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)(x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1)$　⑦関連

(3)　$x^{16}+x^{8}+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$　⑧関連

(3)　$x^{20}+x^{10}+1=(x^{10}+x^5+1)(x^{10}-x^5+1)$　＊2-⑤-(3),3-⑤-(3)参照

$=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)\ (x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$　⑩関連

(3)　$x^{22}+x^{11}+1=(x^2+x+1)$　＊2-⑤-(3)に同じ

$\times(x^{20}-x^{19}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{11}-x^{10}+x^9-x^7+x^6-x^4+x^3-x+1)$　⑪関連

３．交項数列

(10)　$x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

(12)　$x^{11}-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

$=(x-1)(x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1)=(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

(14)　$x^{13}-x^{12}+x^{11}-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

$=(x-1)\{(x^6+x^4+x^2+1)^2-(x^5+x^3+x)^2\}$　＊平方差

$=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\ (x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

(15)　$x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$

$=(x^2-x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$

(16)　$x^{15}-x^{14}+x^{13}-x^{12}+x^{11}-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

$=(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

(18)　$x^{17}-x^{16}+x^{15}-x^{14}+x^{13}-x^{12}+x^{11}-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$

(20)　$x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^{16}+x^{15}-x^{14}+\cdot\ \cdot\ \cdot+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

$=(x-1)(x^2+1)(x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1)$　＊平方差を２回

$=(x-1)(x^2+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

(21)　$x^{20}-x^{19}+x^{18}-x^{17}+x^{16}-x^{15}-\cdot\ \cdot\ \cdot-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$

$=(x^2-x+1)(x^{18}-x^{15}+x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)=(x^2-x+1)\ (x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$\times\ (x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)$　＊3-③-(7)参照　①関連

(6)　$x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1=(x^2-1)(x^8+x^4+1)$

$=(x+1)\ (x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

(8)　$x^{14}-x^{12}+x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1$

$=(x^2-1)(x^{12}+x^8+x^4+1)=(x-1)(x+1)(x^4+1)(x^8+1)$

(9)　$x^{16}-x^{14}+x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1=(x^4-x^2+1)(x^{12}-x^6+1)$

(10)　$x^{18}-x^{16}+x^{14}-x^{12}+x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1$　＊平方差を２回

$=(x+1)(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^8-x^6+x^4-x^2+1)$　②関連

(5) $x^{12}-x^9+x^6-x^3+1=(x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$　＊1-(15),割り算

(6)　$x^{15}-x^{12}+x^9-x^6+x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$

(7)　$x^{18}-x^{15}+x^{12}-x^9+x^6-x^3+1$　＊散歩道(38)P2

$=(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)$　③関連

(6)　$x^{20}-x^{16}+x^{12}-x^8+x^4-1=(x^4-1)(x^{16}+x^8+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$ ④関連

(3) $x^{10}-x^5+1=(x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$

＊ $x=-\omega(\omega^3=-1)$ を代入、$\omega^2-\omega+1=0$

(4) $x^{15}-x^{10}+x^5-1=(x-1)(x^2+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\ (x^8-x^6+x^4-x^2+1)$ ⑤関連

(4) $x^{18}-x^{12}+x^6-1=(x^{12}+1)(x^6-1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^8-x^4+1)$

⑥関連

(3) $x^{14}-x^7+1=(x^2-x+1)(x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)$ ＊3-⑤-(3),割り算

⑦関連

(4) $x^{27}-x^{18}+x^9-1=(x^9-1)(x^{18}+1)=(x^3-1)(x^6+x^3+1)(x^6+1)(x^{12}-x^6+1)$

$=(x-1)(x^2+x+1)\ (x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^6+x^3+1)(x^{12}-x^6+1)$ ⑨関連

(3) $x^{22}-x^{11}+1=(x^2-x+1)$ ＊3-⑤-(3),割り算

$\times(x^{20}+x^{19}-x^{17}-x^{16}+x^{14}+x^{13}-x^{11}-x^{10}-x^9+x^7+x^6-x^4-x^3+x+1)$ ⑪関連

以　上

(参考資料)

[1] ネットワーク型教材データベース　「数学のいずみ」

私の数学散歩道(38)　「二項式 $x^{42}-1$ を因数分解してみよう！」

2020.08.20.　札幌市中央区北 1 条東 3 丁目 2-2-1406

村田　洋一　　E-mail y-murata-yh@nifty.com

「On the factorization that derives from previous report」