私の数学散歩道(38) 数実研会員 村田 洋一

二項式 $x^{42}-1$ を因数分解してみよう！

今回 かなり面倒な二項式 $x^{2\times3\times7}-1$ の因数分解にチャレンジしてみました。
参考資料〔1〕にはx^n-1の $n=30$ と 105 の場合の解答があるも、小生は$n=42$ の場合を取り上げました。与式を$(x^3)^{14}-1, (x^{14})^3-1, (x^6)^7-1$等とし共通の因数を工夫して見つけていく、式の特徴から平方式の差を考える、$x=\omega$（$\omega^3=1,-1$) を代入し$\omega^2\pm\omega+1=0$ を利用するなど なかなか大変でした。
とくに筆算での複雑な文字式の割り算には苦労しました。$n=66, 78$などチャレンジしませんか？
なお、＊表示はその前に出てくる幾分難しい因数分解の脚注です。

１．因数の探索

A 1-1. $(x^3)^{14}-1=(x^3-1)(x^{39}+x^{36}+\cdot\cdot+x^3+1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$\times(x^{36}+x^{30}+\cdot\cdot+x^6+1)$ ・・・①

＊2 項ずつ(x^3+1) を括り出し

$x^{39}+x^{36}+x^{33}+\cdot\cdot+x^6+x^3+1=(x^3+1)(x^{36}+x^{30}+\cdot\cdot+x^6+1)$

1-2. $(x^{14})^3-1=(x^{14}-1)(x^{28}+x^{14}+1)=(x^2-1)(x^{12}+x^{10}+\cdot\cdot+x^2+1)(x^{14}+x^7+1)$

$\times(x^{14}-x^7+1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^5+\cdot\cdot+x+1)$

$\times(x^6-x^5+\cdot\cdot-x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$

$\times(x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)$ ・・・②

＊平方式の差から確認できる。

$(x^6+x^4+x^2+1)^2-(x^5+x^3+x)^2=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\times(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)=(x^{12}+x^8+2x^{10})+(x^4+2x^2+1)$

$+(2x^4+2x^8+4x^6)-(x^{10}+x^6+x^2+2x^4+2x^8+2x^6)=x^{12}+x^{10}+\cdot\cdot+x^2+1$

＊ $x^{14}+x^7+1$, $x^{14}-x^7+1$ に各々 $x=\omega$ を代入して $\omega^{14}\pm\omega^7+1=\omega^2\pm\omega+1=0$ と

なるからそれぞれ因数x^2+x+1, x^2-x+1を持つ。

割り算を実行して前者は $(x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$

後者は $(x^2-x+1)(x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)$ と因数分解される。

B. 2-1. $(x^7)^6-1=(x^7-1)(x^{35}+x^{28}+\cdot\cdot+x^7+1)=(x-1)(x^6+x^5+\cdot\cdot+x+1)(x^{21}+1)(x^{14}+$

$+x^7+1)=(x+1)(x-1)(x^6+x^5+\cdot\cdot+x+1)(x^{20}-x^{19}+x^{18}-\cdot\cdot+x^2-x+1)$

$\times(x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$\times(x^2-x+1)\ (x^6+x^5+\cdot\ \cdot+x+1)\ (x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$

$\times(x^{18}-x^{15}+x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)$ ・・・③

＊ $x^{35}+x^{28}+x^{21}+\cdot\ \cdot+x^{14}+x^7+1$

$=x^{21}(x^{14}+x^7+1)+(x^{14}+x^7+1)=(x^{21}+1)(x^{14}+x^7+1)$

＊ $x^{20}-x^{19}+x^{18}-\cdot\ \cdot+x^2-x+1=(x^2-x+1)(x^{18}-x^{15}+\cdot\ \cdot+x^6-x^3+1)$

2-2 $(x^6)^7-1=(x^6-1)(x^{36}+x^{30}+\cdot\ \cdot+x^6+1)=(x-1)\ (x^5+x^4+\cdot\ \cdot+x+1)\ (x^{36}+x^{30}+x^{24}$

$+\cdot\ \cdot+x^6+1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\ (x^{36}+x^{30}+\cdot\ \cdot+x^6+1)$ ・・・④

＊ $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=x^3(x^2+x+1)+x^2+x+1=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

C. 3-1. $(x^{21})^2-1=(x^{21}+1)(x^{21}-1)=(x+1)\ (x-1)(x^{20}-x^{19}+x^{18}-\cdot\ \cdot+x^2-x+1)$

$\times(x^{20}+x^{19}+x^{18}+\cdot\ \cdot+x^2+x+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\ (x^{18}+x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$

$\times(x^{18}-x^{15}+x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)$ ・・・⑤

3-2. $(x^2)^{21}-1=(x^2-1)\ (x^{40}+x^{38}+x^{36}+\cdot\ \cdot+x^4+x^2+1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$\times(x^2-x+1)\ (x^{36}+x^{30}+\cdot\ \cdot+x^6+1)$ ・・・⑥

＊ $x^{40}+x^{38}+x^{36}+\cdot\ \cdot+x^4+x^2+1=x^{36}(x^4+x^2+1)+\cdot\ \cdot+(x^4+x^2+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^{36}+x^{30}+\cdot\ \cdot+x^6+1)$

・⑥と⑤を比べ⑤の最後の 2 因数の積が⑥の最後の因数に一致する筈。

x^6 の 3 乗毎の平方式の差なので $(x^{18}+x^{12}+x^6+1)^2-(x^{15}+x^9+x^3)^2$

$=(x^{18}+x^{12})^2+(x^6+1)^2+2(x^{18}+x^{12})\ (x^6+1)-(x^{30}+x^{18}+x^6+2x^{24}+2x^{12}+2x^{18})$

$=x^{36}+x^{30}+\cdot\ \cdot+x^6+1$ で ⑥、④、①は⑤に一致する。

・②の 5、7 項を⑤の 5 項と比べて一致する筈。

$(x^{18}+x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)\div(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1$ 具体的な計算例は 4 頁の注 1)参照

・同様に⑤の 6 項は②の 6 項で割り切れる筈。

$(x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)\ (x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$=x^{18}-x^{15}+x^{12}-x^9+x^6-x^3+1$ 計算例は 4 頁の注 2)参照

２．求める因数分解の結果と関連コメント

③の最後の項を因数分解して（注 2）参照）②に一致

$x^{42}-1=$

$(x+1)(x-1)\ (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6-x^5$

$+x^4-x^3+x^2-x+1)\ (x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)\ (x^{12}+x^{11}-x^9$

$-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)$ （＊＊）

ここで気になるのは得られた整係数の因数が既約かどうかであろう。

その一つに「アイゼンシュタインの既約判定法」があるのを知った。「岩波数学入門辞典」によると『一般に、与えられた多項式の既約性を確かめるのは容易でないが、次の事実は既約性の一つの判定法を与える。(下線部：筆者)

整数係数の多項式　$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_n$　と素数 p　に対して

(1)　a_0　は p　で割り切れない。

(2)　$a_1, . . ., a_n$ は p で割り切れるが、a_n は p^2 では割り切れない。

が成り立てば、$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_n$　は Q 上の多項式として既約である。

例　$x^3 - 6$ や $2x^3 + 9x^2 + 6x - 3$ は　$p = 3$ について条件を満たし Q 上既約である。』

明らかに既約の（＊＊）の第 1～4 項を除いた第 5～8 項について上記判定法を使っても一つの条件が成立せず既約といえない。他に判定法があるのだろう。

ただ第 5～8 項の因数の各々＝0 とし 6 次と 12 次の代数方程式を「ke!san」で解くと、第 5, 6 項は 3 組の、第 7,8 項は 6 組の共益複素数解を持ち すべての因数が既約であるとわかる。

また［１］には　$x^{105} - 1$　の因数分解で -2 を 2 個係数に持つ例が載っていた。参考までに紹介する。冪が更に大きくなるとまだ出てくるようであるが、小生は知らない。

$$
\begin{aligned}
x^{105} - 1 = {} & (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\,(x^8-x^7+x^5 \\
& -x^4+x^3-x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)\,(x^{24}-x^{23}+x^{19}-x^{18}+x^{17} \\
& -x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^8+x^7-x^6+x^5-x+1)\,(x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42} \\
& -2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17} \\
& +x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

尚、4 頁の組み立て除法は小生の工夫によるもので、正式な記法かどうか不明である。

(参考資料)

［１］ゆっくり考えよう！高校総合学習の数学　佐々木正敏　講談社　ブルーバックス 1428

［２］岩波書店　数学入門辞典　2005 年 8 月第 1 刷

2020. 5.20.　札幌市中央区北 1 東 3 丁目 2-2-1406

村田　洋一　　　　E-mail　 y-murata-yh@nifty.com

注 1)　$(x^{18}+x^{15}+x^{12}+x^{9}+x^{6}+x^{3}+1)\div(x^{6}+x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1)$
$= x^{12}-x^{11}+x^{9}-x^{8}+x^{6}-x^{4}+x^{3}-x+1$　の略記計算

	⑱	⑰	⑯	⑮	⑭	⑬	⑫	⑪	⑩	⑨	⑧	⑦	⑥	⑤	④	③	②	①	⓪	
							1	-1		1	-1		1		-1	1		-1	1	商
	⑱	⑰	⑯	⑮	⑭	⑬	⑫	⑪	⑩	⑨	⑧	⑦	⑥	⑤	④	③	②	①	⓪	冪乗
除数１１１１１１１)	1			1			1			1			1			1			1	被除数
	1	1	1	1	1	1	1													
		-1	-1		-1	-1														
		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1												
				1			1	1		1										
				1	1	1	1	1	1	1										
					-1	-1			-1											
					-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1									
							1	1		1	1		1							
							1	1	1	1	1	1	1							
									-1			-1								
									-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1					
										1	1		1	1	1	1				
										1	1	1	1	1	1	1				
												-1								
												-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		
													1	1	1	1	1	1	1	
													1	1	1	1	1	1	1	
																			0	

注 2)　$(x^{12}+x^{11}-x^{9}-x^{8}+x^{6}-x^{4}-x^{3}+x+1)(x^{6}-x^{5}+x^{4}-x^{3}+x^{2}-x+1)$
$= x^{18}-x^{15}+x^{12}-x^{9}+x^{6}-x^{3}+1$　の略記計算

符号	冪乗	⑱	⑰	⑯	⑮	⑭	⑬	⑫	⑪	⑩	⑨	⑧	⑦	⑥	⑤	④	③	②	①	⓪
								1	1		-1	-1		1		-1	-1		1	1
	6乗	1	1		-1	-1		1		-1	-1		1	1						
(−)	5		-1	-1		1	1		-1		1	1		-1	-1					
	4			1	1		-1	-1		1		-1	-1		1	1				
(−)	3				-1	-1		1	1		-1		1	1		-1	-1			
	2					1	1		-1	-1		1		-1	-1		1	1		
(−)	1						-1	-1		1	1		-1		1	1		-1	-1	
	0							1	1		-1	-1		1		-1	-1		1	1
	総計	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1