私の数学散歩道(37)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　村田　洋一

か な り 面 倒 な 三 角 方 程 式

今回 かなり面倒な三角方程式を考えてみました。前回の散歩道(36)の(1)で三角方程式 $\sin x\sin 2x\sin 5x=\frac{1}{8}(0<x<\frac{\pi}{4})$ の解法を取り上げました。今回はこの問題の拡張として下記をテーマにしました。 A. $\cos x\cos 4x\cos 5x=\sin x\sin 2x\sin 5x$ （$0<x<\frac{\pi}{4}$) の解法と各辺に共通する定数は? B. $\cos x\cos 4x\cos 5x=\sin x\sin 2x\sin 5x=\frac{1}{8}$ (同前)の解法は? C. $\cos x\cos 4x\cos 5x=\frac{1}{8}$ (同前)の解法は? (D. $\sin x\sin 2x\sin 5x=\frac{1}{8}$ (同前)の解法は? ・・・D.は A.～C.との比較のため重複掲載したもの。)

A.～D.の解法のアプローチが違い 計算の煩雑さと相まって解く時間がかかったが、推論のプロセスを楽しむことができた。とくに B の解法では各式の右辺の定数を(方程)式の値として等値、方程式の次数を下げ簡略化を図った。 また計算の過程で出てきた高次方程式は前回同様 ke!san（計算サイト）により内容の煩雑さを避けました。

A　次の三角方程式を解き、両辺に共通する定数を求めよ。

$$\cos x\cos 4x\cos 5x=\sin x\sin 2x\sin 5x \quad (0<x<\frac{\pi}{4}) \quad ・・・・①$$

①の左辺を P とし $\cos 2x$ で表わす。$\cos 5x\cos x=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 4x)$ より

$$\cos x\cos 4x\cos 5x=\frac{1}{2}\cos 6x\cos 4x+\frac{1}{2}\cos^2 4x=\frac{1}{2}\cos 2x(4\cos^2 2x-3)(2\cos^2 2x-1)$$

$+\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-1)^2$　$\cos 2x=t$ と置くと　P$=\frac{1}{2}(2t^2-1)\left\{t(4t^2-3)+(2t^2-1)\right\}$

一方 右辺を Q とし $\sin 2x$ と $\cos 2x$ で表わす。P と同様に

$$\sin x\sin 5x=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 6x) \qquad \sin x\sin 2x\sin 5x=\frac{1}{2}\sin 2x(\cos 4x-\cos 6x)$$

これから Q=$\frac{1}{2}\sin 2x\left\{(2\cos^2 2x-1)-\cos 2x(4\cos^2 2x-3)\right\}$　$\cos 2x=t$ と置くと

$0<2x<\pi/2 \quad 0<t<1 \quad \sin 2x=\sqrt{1-t^2}>0$ より

Q=$\dfrac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\left\{(2t^2-1)-t(4t^2-3)\right\}$　　$4P^2=4Q^2$ を作り等値すると

$$t^2(2t^2-1)^2(4t^2-3)^2+(2t^2-1)^4+2t(2t^2-1)^3(4t^2-3)$$
$$=t^2(1-t^2)(4t^2-3)^2+(1-t^2)(2t^2-1)^2-2t(1-t^2)(2t^2-1)(4t^2-3)$$

左辺、右辺の対応する第 1,2,3 項を左辺に集めて計算する。

$$t^2(4t^2-3)^2\left\{(2t^2-1)^2-(1-t^2)\right\}=t^2(4t^2-3)^2(4t^4-3t^2)=t^4(4t^2-3)^3$$

$$(2t^2-1)^2\left\{(2t^2-1)^2-(1-t^2)\right\}=t^2(2t^2-1)^2(4t^2-3)$$

$$2t(2t^2-1)(4t^2-3)\left\{(2t^2-1)^2+(1-t^2)\right\}=2t(2t^2-1)(4t^2-3)(4t^4-5t^2+2)$$

これらを加えて　$t(4t^2-3)\left\{t^3(4t^2-3)^2+t(2t^2-1)^2+2(2t^2-1)(4t^4-5t^2+2)\right\}=0$

$t(4t^2-3)(16t^7+16t^6-20t^5-28t^4+5t^3+18t^2+t-4)=0$

(　　)内は $(t+1)$ を因数に持つから

$t(4t^2-3)(t+1)(16t^6-20t^4-8t^3+13t^2+5t-4)=0=0$

これから　$t=-1,0,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　また第 4 項の 6 次方程式の解を t_1〜t_6 とする。

$t_1=-0.7797 \quad t_2=0.5604 \quad t_{3\sim4}=-0.7033\pm0.5938i \quad t_{5\sim6}=0.8129\pm0.1189i$

一見 適するのは $t=\cos 2x(0<t<1)$ より $0.5604,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{12},27.9582°$　①の両辺で確認して

$x=\dfrac{\pi}{12}$ のとき　左辺$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{1}{8}$＝右辺

$x=27.9582°$ のとき　左辺＝0.2508＝右辺

従って　$x=15°$、27. 9582° が解で、そのとき各々 共通の定数 $\dfrac{1}{8},0.2508$ を持つ。

B $\cos x\cos 4x\cos 5x=\sin x\sin 2x\sin 5x=\frac{1}{8}(0<x<\frac{\pi}{4})$ ・・・・②

A より　$2\mathrm{P}=(2t^2-1)\left\{(2t^2-1)+t(4t^2-3)\right\}=\frac{1}{4}$　　・・・・③

$\mathrm{Q}=\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\left\{(2t^2-1)-t(4t^2-3)\right\}=\frac{1}{8}$　　ここで $2P=16Q^2$ を作り

$4(1-t^2)\left\{(2t^2-1)-t(4t^2-3)\right\}^2=\frac{1}{4}$ ・・・・④　として③と④を等値する。

これにより次数を下げ、ブロック別に展開・整理すると

$$4(1-t^2)(2t^2-1)^2+4t^2(1-t^2)(4t^2-3)^2-8t(1-t^2)(2t^2-1)(4t^2-3)$$
$$=t(2t^2-1)(4t^2-3)+(2t^2-1)^2$$

$(4t^2-3)$ を因数に持つ可能性があるので

$$(4t^2-3)\left\{4t^2(-4t^4+7t^2-3)-8t\ (-2t^4+3t^2-1)-t(2t^2-1)\right\}+(2t^2-1)^2\left\{4(1-t^2)-1\right\}=0$$

$(4t^2-3)\ (16t^6-16t^5-24t^4+26t^3+8t^2-9t+1)=0$　・・・・⑤

⑤式の第 2 項を $f(t)$ とすると　$f(-1)=0$　$f(\frac{1}{2})=0$　$f(t)$ を $(2t^2+t-1)$ で

割った商を $g(t)$ として　$g(t)=8t^4-12t^3-2t^2+8t-1=0$ の 4 個の解　t_1,t_2,t_3,t_4 は

$t_1=-0.7722, t_2=0.1325, t_{3,4}=1.0698\pm 0.2764i$　$0<2x<\frac{\pi}{2}$ より　$0<t<1$

適するのは $t=\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0.1325$ のとき

$t=\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ から $x=\frac{\pi}{12}$、　$t=\frac{1}{2}$ から $x=\frac{\pi}{6}$　左辺$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{8}$

$\neq\frac{\sqrt{3}}{8}$=右辺　$t=0.1325$ のとき $x=41.1906°$　①の左辺 0.6528≠右辺(-0.2857)で

無縁解　これらを纏めて $x=15°$ が求める解である。

C $\cos x\cos 4x\cos 5x=\frac{1}{8}$　$(0<x<\frac{\pi}{4})$　・・・・⑥　を解け。

A 同様　$\cos 2x=t$　⑥と P より $4(2t^2-1)^2+4t(2t^2-1)(4t^2-3)-1=0$ 因数分解して

$$\left\{2(2t^2-1)+1\right\}\left\{2(2t^2-1)-1\right\}+4t\ (2t^2-1)(4t^2-3)=0$$

$$(4t^2-3)(8t^3+4t^2-4t-1)=0$$

$t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 第 2 項の解を t_1,t_2,t_3 として $t_1=-0.9009, t_2=-0.2225, t_3=0.6235$

$0<2x<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<t<1$ 適するのは $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0.6235$ $t=\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $x=\dfrac{\pi}{12}$

$t=0.6235$ から $x=25.7143°$ ⑤の左辺=0.12499=右辺(0.12500)

これらを纏めて $x=15°, 25.7143°$ が求める解である。

D $\sin x\sin 4x\sin 5x=\dfrac{1}{8}$ （$0<x<\dfrac{\pi}{4}$） ・・・・⑦ を解け。

A より ⑦式は $\sin 2x\left\{1-2\sin^2 2x-\cos 2x(1-4\sin^2 2x)\right\}=\dfrac{1}{4}$

$4\sin 2x-8\sin^3 2x-4\sin 2x\cos 2x(1-4\sin^2 2x)-1=0$ 左辺第 3 項を右辺に移項、

平方すると $(4\sin 2x-8\sin^3 2x-1)^2=16\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)(1-4\sin^2 2x)^2$

$\sin 2x=t$ と置き右辺、左辺を因数分解して

$$(2t-1)^2(-4t^2+2t-1)^2=16t^2(1-t^2)(2t+1)^2(2t-1)^2$$

整理して $(2t-1)^2(64t^6+64t^5-32t^4-48t^3-20t^2-4t+1)=0$

$(2t-1)^2=0$ より $t=\dfrac{1}{2}$ $2x=\dfrac{\pi}{6}$ から $x=\dfrac{\pi}{12}$ このとき 左辺＝右辺＝$\dfrac{1}{8}$ で適する。

上記第 2 項の 6 次方程式を ke!san で解くと

$t_1=-0.9735, t_2=-0.6523, t_{3,4}=-0.2109\pm 0.3981i$

$t_5=0.1325, t_6=0.9150$ このうち 条件より適するのは t_5 と t_6 のみ。

t_5 のとき (逆)三角関数から $\sin x$, $\cos x, \sin 5x$ を求める。t_6 のときも同様。

$\sin 2x=0.1325$ $\sin x=0.0664, \cos x=0.9978, \sin 5x=\sin 19.038°=0.3262$

積 $\sin x\sin 2x\sin 5x=0.00287$ で不適。（$x=3.8076°$）

t_6 のとき $\sin 2x=0.9150$ $\sin x=0.5461, \cos x=0.8377, \sin 5x=\sin 165.51075°$

$=0.2502$ 積 $\sin x\sin 2x\sin 5x=0.125(02)$ で適する。（$x=33.10215°$）

従って $x=15°$、$33.10215°$ が求める解となる。

以　上