私の数学散歩道(36)　　　　　　　　　　　　　　　　　　村田　洋一

幾分面倒な三角方程式と覆面算

今回 幾分面倒な三角方程式2題を自作、その解答と合わせて「初等数学」86号で紹介の覆面算に挑戦してみました。 また 今までは計算の過程で出てきた高次方程式を代数的に解いていましたが、今回は ke!san（計算サイト）により煩雑さを避けました。

１．次の三角方程式を解け。

(1)　$\sin x \sin 2x \sin 5x = \dfrac{1}{8}$　・・・・①（$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$）

①を$\sin x$　のみの式で表わすことができるか検討する。

$\sin 5x = \sin(2x+3x) = \sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

($\because 2\sin x \cos^2 x(4\cos^2 x - 3) + (1 - 2\sin^2 x)(3\sin x - 4\sin^3 x)$ で$\sin x$　のみで表示）

$\sin 2x$　から出てくる$\cos x$　が浮いてしまう。$\sin x$　の式にするため①の両辺を平方すると16次式になり解ける気がしない。

次数を下げるため$\sin 2x$　で①を表わす。

$\sin x \sin 5x = -\dfrac{1}{2}(\cos 6x - \cos 4x) = \dfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = \cos 2x(1 - 4\sin^2 x)$

従って①式は　　$\sin 2x\left\{1 - 2\sin^2 2x - \cos 2x(1 - 4\sin^2 2x)\right\} = \dfrac{1}{4}$

$4\sin 2x - 8\sin^3 2x - 4\sin 2x\cos 2x(1 - 4\sin^2 2x) - 1 = 0$　左辺第3項を右辺に移項、

平方すると　$(4\sin 2x - 8\sin^3 2x - 1)^2 = 16\sin^2 2x(1 - \sin^2 2x)(1 - 4\sin^2 2x)^2$

$\sin 2x = t$　と置き右辺、左辺を因数分解して

$$(2t-1)^2(-4t^2+2t-1)^2 = 16t^2(1-t^2)(2t+1)^2(2t-1)^2$$

整理して　　$(2t-1)^2(64t^6 + 64t^5 - 32t^4 - 48t^3 - 20t^2 - 4t + 1) = 0$

$(2t-1)^2 = 0$　より $t = \dfrac{1}{2}$　$2x = \dfrac{\pi}{6}$　から $x = \dfrac{\pi}{12}$　　念のため検算をしてみる。

$\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ で 各々の積は$\dfrac{1}{8}$

上記第2項の6次方程式を ke!san で解くと

$t_1 = -0.97347, t_2 = -0.65232, t_3 = -0.21086 - 0.39805i, t_4 = -0.21086 + 0.39805i$

$t_5 = 0.13252, t_6 = 0.91499$　　条件より適するのはt_5とt_6　のみ。

t_5のとき 逆三角関数から$\sin x$,$\cos x, \sin 5x$　を求める。t_6のときも同様。

$\sin 2x = 0.13252 \quad \sin x = 0.066406, \cos x = 0.99779, \sin 5x = \sin 19.038° = 0.32619$

積$\sin x \sin 2x \sin 5x = 0.002870$ で不適。

t_6 のとき $\sin 2x = 0.91499$

$\sin x = 0.54613, \cos x = 0.83769, \sin 5x = \sin 165.51075° = 0.250198$

積$\sin x \sin 2x \sin 5x = 0.125(024)$ で適する。　（$x = 33.10215°$）

従って　$x = 15°$、$33.10215°$ が求める解となる。

⑵ $\tan 2x \tan 3x \tan 4x = 1$ ・・・・②　（$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$）

②を $\tan x$ の式で表わすことを考える。

倍角公式より　$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}, \tan 3x = \dfrac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = \dfrac{\tan x + \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - \dfrac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}}$

$= \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$ また $\tan 4x = \dfrac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x} = \dfrac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$

$\tan x = t$ として②に代入、分母子を整理すると

$8t^3(1-t^2)(3-t^2) = (1-t^2)(1-3t^2)(1-6t^2+t^4)$　　共通因数で括り 整理すると

$(t^2-1)(3t^6-8t^5-19t^4+24t^3+9t^2-1) = 0$ 第 2 項を $f(t)$ とし因数分解を考える。

ここで $t = \pm 1$ のとき $\tan 2x$ と $\tan 4x$ は各々不能、0 となるが、$\tan 3x = -1 (t = 1)$

このとき $t^3 + 3t^2 - 3t - 1 = 0, (t-1)(t^2+4t+1) = 0$、同様に $\tan 3x = 1 (t = -1)$ のとき

$t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0, (t+1)(t^2-4t+1) = 0$　これから $f(t)$ は t^2-4t+1, t^2+4t+1 の

いずれかで割り切れる可能性がある。

前者で割り算を実行すると　$f(t) = (t^2-4t+1)(3t^4+4t^3-6t^2-4t-1) = 0$

第 1 項より $t = 2 \pm \sqrt{3}$ であるが、$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ より $t = \tan x = 2 - \sqrt{3}$ 検算をすると

$\tan 2x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{-3+2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \tan 3x = \dfrac{(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{5-3\sqrt{3}} = 1$、$\tan 4x = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{3}$ で積= 1

上記の式、例えば第 1 式より　$2x = \dfrac{\pi}{6}$ から $x = \dfrac{\pi}{12}$

第 2 項を ke!san により解くと

$t_1 = -2.03395, t_2, t_3 = -0.27974 \mp 0.22759i, t_4 = 1.26011$

この中に条件に適する解はなく、$x = 15°$（$\dfrac{\pi}{12}$）が求める解である。

２．次の覆面算を解け。

（算額を作ろう コンクール金賞（関孝和賞）受賞作

竜ケ崎第一高等学校２年渡辺さんの作品）

$ABC = D^E$ ・・・① $A + BC = DE$ ・・・② （$A, B, D \neq 0$）

100 の位を a，10 の位を b，１の位を c と置く。以下同様の考え方で

$100a + 10b + c = d^e$ ・・・③ $a + 10b + c = 10d + e$ ・・・④

③ −④より $10d + e = d^e - 99a$ ・・・⑤

④で $c = 0$ とすると $a - e = 10(d - b)$ であるが、すべて１桁の数よりありえない。

③で $e = 0$ とすると３桁の数が１になり矛盾。$d = 1$ の時も同様。

従って $1 \leq a, b, c, e \leq 9,\quad 2 \leq d \leq 9$ から⑤の左辺は $21 \leq 10d + e \leq 99$ となる。

$a = 1$ から 9 まで動かし各々のケースで $21 \leq d^e - 99a \leq 99 (a = 1〜9)$ を満足する (d, e) の組から⑤を満たし④を成立させる (b, c) を求めればよい。

$a = 1$ の時 $21 \leq 10d + e = d^e - 99 \leq 99\ (a = 1)$

同様に $21 \leq d^e - 198 \leq 99 (a = 2)$　$21 \leq d^e - 297 \leq 99 (a = 3)$

$21 \leq d^e - 396 \leq 99 (a = 4)$　$21 \leq d^e - 495 \leq 99 (a = 5)$

$21 \leq d^e - 594 \leq 99 (a = 6)$　$21 \leq d^e - 693 \leq 99 (a = 7)$

$21 \leq d^e - 792 \leq 99 (a = 8)$　$21 \leq d^e - 891 \leq 99 (a = 9)$

$d = 2$ の時	$d^e = 2^7 = 128\ (a = 1)$	$128 - 99 = 29$ より	$d = 2, e = 9$	不適
	$d^e = 2^8 = 256 (a = 2)$	$256 - 198 = 58$ より	$d = 5, e = 8$	不適
	$d^e = 2^9 = 512\ (a = 5)$	$512 - 495 = 17$ より	$d = 1, e = 7$	不適
$d = 3$ の時	$d^e = 3^5 = 243\ (a = 2)$	$243 - 198 = 45$ より	$d = 4, e = 5$	不適
	$d^e = 3^6 = 729 (a = 7)$	$729 - 693 = 36$ より	$d = 3, e = 6$	適
$d = 4$ の時	$d^e = 4^4 = 256\ (a = 2)$	$256 - 198 = 58$ より	$d = 5, e = 8$	不適
$d = 5$ の時	$d^e = 5^3 = 125\ (a = 1)$	同様にして	差＝26	不適
	$d^e = 5^4 = 625 (a = 6)$		差＝31	不適
$d = 6$ の時	$d^e = 6^3 = 216 (a = 2)$		差＝18	不適
$d = 7$ の時	$d^e = 7^3 = 343 (a = 3)$		差＝46	不適
$d = 8$ の時	$d^e = 8^3 = 512 (a = 5)$		差＝17	不適
$d = 9$ の時	$d^e = 9^3 = 729 (a = 7)$		差＝36	不適

従って $a = 7$ の時の $d = 3, e = 6$ が解（の候補）、これを④に代入して

$10b + c = 36 - 7 = 29$ から $b = 2, c = 9$

与えられた覆面算は $729 = 3^6$ $7 + 29 = 36$ で成立する。

＊「初等数学」87 号で合同式利用ほかの別解があるかどうか楽しみです。　以 上