私の数学散歩道(35)　数実研会員　村田　洋一

三角関数 $\tan 3n°(1 \le n \le 15, n : \mathrm{int}.$）の無理数表示を中心にして

先般　2006 京大の有名な入試問題「$\tan 1°$ は有理数か？」を見ていて題記テーマを思いついた。$\tan 3°$ から $3°$ 刻みで三角関数を無理数で表示できるが、例えば $\tan 1°$ や $\sin 4°$ 等それ以外の角は無理数であるも根号を用いての無理数表示ができない。注１）　敢えて求めるなら $\tan\ 3°$ を小数表示してから $\tan 1°$ を 3 倍角公式 で表し 3 次方程式から近似値を求めるしかないでしょう。

既知の $30°, 45°, 60°$ と $15°, 18°$ の三角関数は計算で求められるからこれらに加法定理、倍角公式等を駆使し正弦、余弦、正接の題記関数の無理数表示にチャレンジしてみた。　スペースの関係から正弦、余弦の議論は簡単に、正接の計算を詳しく検討した。また $45° < 3n° < 90°$ については余角の公式から $\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta), \sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ で正弦、余弦の値は入替り 正接は本稿で求めた三角関数の逆数になるため、この分の記載は省略した。

①　$3°, 15°, 18°, 30°, , 42°$

$\alpha = 18°$ として $3\alpha = 90° - 2\alpha$ から $\sin 3\alpha = \cos 2\alpha$ 　これから　$\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$

$\cos 18° = \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ また $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 　$\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \frac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{16}$$

$$\cos 3° = \cos(18° - 15°) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{16}$$

よって　$\tan 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$ 　$\tan 18° = \dfrac{(3\sqrt{5} - 5)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{20} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{5}$

また $\sin 30° = \dfrac{1}{2}, \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で $\sin 30°$ と後で見る $\tan 45°$ が有理数となる。

$$\tan 3° = \tan(45° - 42°) = \frac{2 - (\sqrt{15} + \sqrt{3}) + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2 + (\sqrt{15} + \sqrt{3}) - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \quad a = \sqrt{15} + \sqrt{3} \quad b = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

と置くと　与式$=\dfrac{(2+b)^2-a^2}{(2+a)^2-b^2}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt5}-(\sqrt5+1)}{3+\sqrt5+\sqrt3(\sqrt5+1)}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{\sqrt5+1}-1}{\dfrac{3+\sqrt5}{\sqrt5+1}+\sqrt3}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{2}-1}{\dfrac{\sqrt5+1}{2}+\sqrt3}$

$=\dfrac{(1+2\sqrt3-\sqrt5)(2-\sqrt3)(\sqrt{10-2\sqrt5}-2)}{4}$　　ここで $\tan 42°=\dfrac{\sin(45°-3°)}{\cos(45°-3°)}$ から

$\cos 42°=\frac{1}{8}\left\{\sqrt3(\sqrt5-1)+\sqrt2\sqrt{5+\sqrt5}\right\}$　　$\sin 42°=\frac{1}{8}\left\{\sqrt6\sqrt{5+\sqrt5}-\sqrt5+1\right\}$

$\tan 42°=\dfrac{\left\{-(\sqrt5-1)+\sqrt6\sqrt{5+\sqrt5}\right\}\left\{\sqrt3(\sqrt5-1)-\sqrt2\sqrt{5+\sqrt5}\right\}}{3(6-2\sqrt5)-2(5+\sqrt5)}$ 分母、分子を整理して

$=\dfrac{4\sqrt3-\sqrt2(\sqrt5-1)\sqrt{5+\sqrt5}}{2(\sqrt5-1)}=\dfrac{\sqrt3(\sqrt5+1)-\sqrt2\sqrt{5+\sqrt5}}{2}$

②　$6°,12°,24°,36°$　　$6°=36°-30°$ として

$\sin 6°=\frac{1}{8}\left\{\sqrt6\sqrt{5-\sqrt5}-(\sqrt5+1)\right\}$　　$\cos 6°=\frac{1}{8}\left\{\sqrt3(\sqrt5+1)+\sqrt2\sqrt{5-\sqrt5}\right\}$

$\tan 6°=\dfrac{-(\sqrt5+1)+\sqrt6\sqrt{5-\sqrt5}}{\sqrt3(\sqrt5+1)+\sqrt2\sqrt{5-\sqrt5}}$ （ここで $a=\sqrt6\sqrt{5-\sqrt5}, b=\sqrt5+1, c=\sqrt3(\sqrt5+1)$、

$d=\sqrt2\sqrt{5-\sqrt5}$ として）　$=\dfrac{(ac+bd)-(ad+bc)}{c^2-d^2}=\dfrac{\sqrt2(\sqrt5+1)\sqrt{5-\sqrt5}-4\sqrt3}{2(\sqrt5+1)}$

$=\dfrac{\sqrt2\sqrt{5-\sqrt5}-\sqrt3(\sqrt5-1)}{2}$

$\sin 12°=\frac{1}{8}\left\{\sqrt2\sqrt{5+\sqrt5}-\sqrt3(\sqrt5-1)\right\}$　　$\cos 12°=\frac{1}{8}\left\{\sqrt6\sqrt{5+\sqrt5}+\sqrt5-1\right\}$

$\tan 12°=\dfrac{\sin(30°-18°)}{\cos(30°-18°)}$（で $a=\sqrt{5+\sqrt5}, b=\sqrt5-1$ と置くと）　$=\dfrac{4\sqrt2ab-\sqrt3(2a^2+b^2)}{b^2-6a^2}$

$=\dfrac{4\sqrt3-(\sqrt5-1)\sqrt{10+2\sqrt5}}{2(3+\sqrt5)}=\dfrac{(3-\sqrt5)(4\sqrt3-\sqrt{(6-2\sqrt5)(10+2\sqrt5)})}{4}$ 根号から $2\sqrt2$ を出す

$=\dfrac{(3-\sqrt5)(2\sqrt3-\sqrt2\sqrt{5-\sqrt5})}{4}$　　$\sin 24°=\sin(30°-6°)$　同様に $\tan 24°=\dfrac{\sin 24°}{\cos 24°}$ として

$\sin 24^\circ = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$　$\cos 24^\circ = \frac{1}{8}\left\{(\sqrt{5}+1)+\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$

$\tan 24^\circ$（$a=\sqrt{5}+1, b=\sqrt{2(5-\sqrt{5})}$）$= \dfrac{\sqrt{3}(a^2+b^2)-4ab}{a^2-3b^2} = \dfrac{(\sqrt{10}+\sqrt{2})\sqrt{5-\sqrt{5}}-4\sqrt{3}}{2(3-\sqrt{5})}$

$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)\sqrt{(14+6\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}-4\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{8}$　　分子の根号内は $4(10+4\sqrt{5})$

$= \dfrac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2}$　　$36^\circ = 30^\circ + 6^\circ$ として

$\sin 36^\circ = \frac{1}{16}\left\{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\right\} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$

$\cos 36^\circ = \sqrt{1-\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　$\tan 36^\circ = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{\dfrac{2(5-\sqrt{5})}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

③　$9^\circ, 21^\circ, 27^\circ, 33^\circ, 39^\circ, 45^\circ$　　$9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$ として

$\sin 9^\circ = \dfrac{1}{8}\left\{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)-2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$　　$\cos 9^\circ = \dfrac{1}{8}\left\{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)+2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$

$\tan 9^\circ = \dfrac{32-4\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2(6+2\sqrt{5})-4(5-\sqrt{5})} = \dfrac{8-\sqrt{2}\sqrt{(6+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}{2(\sqrt{5}-1)} = \dfrac{8-2\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}-1)}$

$= \dfrac{4(\sqrt{5}+1)-\sqrt{2(6+2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{4} = \sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

また $\tan 9^\circ$ は $\tan 5\theta$ で $\theta = \dfrac{\pi}{20}$ と置いても解ける。　$\tan 3\theta = \tan(\theta+2\theta) = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

$\tan 5\theta = \tan(2\theta+3\theta) = \dfrac{\tan^5\theta - 10\tan^3\theta + 5\tan\theta}{5\tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 1}$　ここで $\tan\dfrac{\pi}{20} = x$ とすると　$\tan 5\theta = 1$

従って　$x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$　左辺を $f(x)$ と置くと $f(1) = 0$　　$0 < x < 1$ より

$x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 1 = 0$　これは相反方程式、定石から　$x + \dfrac{1}{x} = 2(1+\sqrt{5})$　これより

$x = 1+\sqrt{5} \pm \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ であるが $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5+2\sqrt{5}} > 0$ より $x = 1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ が解。

$\sin 21^\circ = \sin(30^\circ - 9^\circ) = \frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{10}+\sqrt{2})\right\}$

$\cos 21° = {}^1\!/_{16}\left\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{10}+\sqrt{2})+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$　ここで $a=\sqrt{3}+1, b=\sqrt{5-\sqrt{5}},$

$c=\sqrt{3}-1, d=\sqrt{10}+\sqrt{2}$ と置くと　$\tan 21° = \dfrac{2bd(a^2+c^2)-ac(4b^2+d^2)}{a^2d^2-4b^2c^2}$　（を計算して）

$$= \frac{(\sqrt{10}+\sqrt{2})\sqrt{5-\sqrt{5}}-4}{2(-1+2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{(-1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}-2)}{4}$$

$\sin 27° = \sin(30°-3°) = {}^1\!/_{16}\left\{\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right.$

$\left.\times(\sqrt{5}-1)+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right\} = \dfrac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{8}$　　$\cos 27°$ も同様にして

$\cos 27° = \cos(30°-3°) = \dfrac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{8}$　面倒だが $\tan 27°$ を正接の 3 倍角の公式で

$\tan 27° = \dfrac{3\tan 9°-\tan^3 9°}{1-3\tan^2 9°}$　　分母$=1-3\left\{(1+\sqrt{5})-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}^2 = -2\left\{2(8+3\sqrt{5})-3\right.$

$\left.\times(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}$　　分子$=-2\left\{(29+13\sqrt{5})-2(5+2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}$

$\tan 27° = \dfrac{(29+13\sqrt{5})-2(5+2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2(8+3\sqrt{5})-3(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$（分母の有理化$=4(109+48\sqrt{5})\ -9(6+2\sqrt{5})$

$\times(5+2\sqrt{5}) = -2(7+3\sqrt{5})$　　分子$=2\left\{(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}-4(2+\sqrt{5})\right\}$ ）となるから

$$= \frac{4(2+\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{4(-1+\sqrt{5})-(1+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$= (\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-2)\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$\sin 33° = \sin(30°+3°) = {}^1\!/_{16}\left\{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right\}$

$\cos 33° = {}^1\!/_{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right\}$

ここで　$a=\sqrt{6}-\sqrt{2},\ b=\sqrt{10+2\sqrt{5}}, c=\sqrt{6}+\sqrt{2}, d=\sqrt{5}-1$　と置くと

$\tan 33° = \dfrac{ab^2c+bc^2d+a^2bd+acd^2}{b^2c^2-a^2d^2}$　（分母$=(10+2\sqrt{5})(8+4\sqrt{3})-(8-4\sqrt{3})(6-2\sqrt{5})$

$= 32(1+2\sqrt{3}+\sqrt{5})$ 分子 $= 64+16(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ ） $= \dfrac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4}{2(1+2\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$$= \frac{(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}+4)}{8(2+\sqrt{3})} = \frac{(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2-\sqrt{3})(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2)}{4}$$

$$\sin 39^\circ = \sin(45^\circ - 6^\circ) = \frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

$$\cos 39^\circ = \frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1) + (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

ここで　$a = \sqrt{6}+\sqrt{2},\ b = \sqrt{10-2\sqrt{5}}, c = \sqrt{6}-\sqrt{2}, d = \sqrt{5}+1$　と置くと

$\tan 39^\circ = \dfrac{ac(b^2+d^2) - bd(a^2+c^2)}{c^2d^2 - a^2b^2}$ (分母 $= -32(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})$ 分子 $= 64-16(\sqrt{5}+1)$

$\times\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ） $= \dfrac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-4}{2(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \dfrac{(1+2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2)}{4}$

また　$\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \tan 45^\circ = 1$

注１）　$\tan 3^\circ = \dfrac{(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2-\sqrt{3})(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2)}{4} = 0.0524$　公式に代入して

$0.0524(1-3\tan^2 1^\circ) = 3\tan 1^\circ - \tan^3 1^\circ$　　$\tan 1^\circ = x$　として

$19.0839x^3 - 3x^2 - 57.2519x + 1 = 0$　これを関数計算機で解くと　$\tan 1^\circ = 0.0175$

同様に $sin 4^\circ, \cos 7^\circ$　等を求める時は３倍角の公式から３次方程式を解くことになる.

最初の例で　$\dfrac{3x - x^3}{1-3x^2} = \dfrac{(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2-\sqrt{3})(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2)}{4}$　から x　が無理数表示で求まれば良いが、それは不可能だろう。

$\tan 3n^\circ (1 \le n \le 15, n:\text{int.})$ の無理数表示

正 接 の 無 理 数 で の 表 示	小数表示 正 接	正 弦	余 弦	記載頁
3° $(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2-\sqrt{3})(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2)\big/4$	0.0524	0.0523	0.9986	2
6° $\left\{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right\}\big/2$	0.1051	0.1045	0.9945	2
9° $1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	0.1584	0.1564	0.9877	3
12° $(3-\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}})/4$	0.2126	0.2079	0.9781	2
15° $2-\sqrt{3}$	0.2679	0.2588	0.9659	1
18° $\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}/5$	0.3249	0.3090	0.9511	1
21° $(-1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}-2)\big/4$	0.3839	0.3584	0.9336	4
24° $\left\{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(3+\sqrt{5})\right\}\big/2$	0.4452	0.4067	0.9135	3
27° $(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-2)\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	0.5095	0.4540	0.8910	4
30° $\sqrt{3}\big/3$	0.5774	0.5000	0.8660	1
33° $(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2-\sqrt{3})(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+2)\big/4$	0.6494	0.5446	0.8387	5
36° $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	0.7265	0.5878	0.8090	3
39° $(1+2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2)\big/4$	0.8098	0.6293	0.7771	5
42° $\left\{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\right\}\big/2$	0.9004	0.6691	0.7431	2
45° 1	1.0000	0.7071	0.7071	5

＊小数表示は無理数の式を小数化したもの。三角関数表との誤差は小数第４位までほとんどなし。

正弦、余弦の具体的な無理式は記載頁を参照願います.