私の数学散歩道(34)　　　　　　　　　　　　　　　数実研会員　　村田　洋一

無理方程式　$\sqrt[5]{2x-3}-\sqrt[5]{5x-2}+\sqrt[5]{3x+2}=1$　の代数的解法は？

今回 上記の無理方程式を考えた。高校では高々平方根、立方根を含むいくつかの整式のものを扱い、4 乗根以上のものは皆無であった。このたび上記の方程式を試行錯誤の上作ってどうすれば解けるかチャレンジしてみた。単純に移項し両辺の 5 乗を繰り返しても根号が取れる確率は低く、別解の可能性を探るため 平方根、立方根・・・のケースから当ってみることにした。旺文社の「高校数学解法辞典」では、無理方程式の未知数および式の値はすべて実数とする、とあるがここでは未知数が実数であれば式の値が複素数でも視覚上 左辺・右辺が一致する限り問題なしとした。

なお 解法の簡略化のため、移項して両辺を平方した時に x の項と定数項が消えるよう工夫した。また（解 B）は冪根を外す工夫として考えた別解である。

（解 1A）平方根：適宜平方を繰りかえす

$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x+2}=1+\sqrt{5x-2}$　・・・①　　①の両辺を平方して

$5x-1+2\sqrt{(2x-3)(3x+2)}=5x-1+2\sqrt{5x-2}$　　これから　$6x^2-10x-4=0$

$x=2 \text{ or } -\dfrac{1}{3}$　　$x=2$ の時　左辺―右辺＝$1-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1=0$　で成立

$x=-\dfrac{1}{3}$ の時　左辺―右辺＝$\sqrt{\dfrac{11}{3}}i-\sqrt{\dfrac{11}{3}}i+1-1=0$　で成立

（解 1B）平方根：無理方程式を連立方程式に還元する解法

$\sqrt{2x-3}=a,\sqrt{5x-2}=b,\sqrt{3x+2}=c$ とおく

x を a,b,c で表わすと　　$x=\dfrac{a^2+3}{2}=\dfrac{b^2+2}{5}=\dfrac{c^2-2}{3}$　・・・①

原式から　$a-b+c=1$　・・・②　①から　$3b^2-5c^2=-16$　・・・③

$a^2-b^2+c^2=(2x-3)-(5x-2)+(3x+2)=1$　・・・④

②、④より　　$1+b^2-c^2=(1+b-c)^2$

整理して　$c^2-c+b-bc=0$　　$(c-1)(b-c)=0$

1）$b=c$ の時　$a=1$　③より　$b^2=c^2=8$

この時　a,b,c の値いずれからも　$x=2$

2)　$c=1$ の時　$a^2=b^2=-\dfrac{11}{3}$　で　$x=-\dfrac{1}{3}$

（解２A）立方根

$\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt[3]{3x+2}=1$ ・・・①

左辺第２項を右辺に移項し、両辺を３乗すると

$$5x-1+3\sqrt[3]{(2x-3)(3x+2)}(\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{3x+2})=5x-1+3\sqrt[3]{5x-2}(1+\sqrt[3]{5x-2})$$

整理して　$\sqrt[3]{(2x-3)(3x+2)}(\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{3x+2})=\sqrt[3]{5x-2}(1+\sqrt[3]{5x-2})$ ・・・②

①と②より　②の左辺第２項は右辺の$1+\sqrt[3]{5x-2}$ に等しい。

従って②の解は　$\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{3x+2}=0, 1+\sqrt[3]{5x-2}=0$ と前２式を両辺から除いた

$\sqrt[3]{(2x-3)(3x+2)}=\sqrt[3]{5x-2}$ から得られる。

これらを解いて順に　$x=\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5},2,-\dfrac{1}{3}$、　解は $x=2,\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{3}$ である。

（解２B）立方根

$\sqrt[3]{2x-3}=a, \sqrt[3]{5x-2}=b, \sqrt[3]{3x+2}=c$ とおき、(解１B)同様x をa,b,c で表わすと

$x=\dfrac{a^3+3}{2}=\dfrac{b^3+2}{5}=\dfrac{c^3-2}{3}$　方程式は$a-b+c=1$ ・・・①$a^3-b^3+c^3=1$ ・・・②

$3b^3-5c^3=-16$ ・・・③　①，②より$(1+b-c)^3=1+b^3-c^3$ これを整理して

$(b-c)(b+1)(c-1)=0$　1）$b=c$ の時　$a=1, b^3=c^3=8$　求める解は　$x=2$

2）$b=-1$ の時 $a^3=-c^3$ ③より $5c^3=-3+16=13$ よって $3x+2=\dfrac{13}{5}$　$x=\dfrac{1}{5}$

3）$c=1$ の時　$a^3=b^3$　$3b^3=5-16=-11$ よって　$5x-2=-\dfrac{11}{3}$　$x=-\dfrac{1}{3}$

（解３A）４乗根

式を整理して両辺の４乗を繰り返しても根号が取れる見込みは少ないと思い、(解Ｂ)に倣うことにしたもの。

（解３B）４乗根

（解１B），（解２B）に倣い$\sqrt[4]{2x-3}=a$ などとして　$a-b+c=1$　$a^4-b^4+c^4=1$

aを消去して　$(b-c+1)^4=b^4-c^4+1$　$\left\{b^2-2b(c-1)+(c-1)^2\right\}^2=b^4+4b^2(c-1)^2$

$$+(c-1)^4-4b^3(c-1)-4b(c-1)^3+2b^2(c-1)^2=b^4-c^4+1$$

尚、aを消去した式に各々$c=1, b=c$を代入すると左辺＝右辺で、上の式は因数定理により$c-1, b-c$を因数に持つ。　これをbについて整理すると

$$(c-1)\left\{2b^3-3(c-1)b^2+2(c-1)^2b-(c^3-c^2+2c)\right\}=0$$

左辺第 2 項を $f(b)$ とおくと　$f(c)=0$　　割り算を実行して

$$(c-1)(b-c)\left\{2b^2-(c-3)b+(c^2-c+2)\right\}=0$$

左辺第 3 項の判別式＝$-7(c-\frac{1}{7})^2-\frac{48}{7}<0$　より実数解はない。

よって　1）$c=1$　の時　$3a^4-2c^4=-13$ から $a^4=b^4=-\frac{11}{3}$ 何れの時も　$x=-\frac{1}{3}$

2)　$b=c$ の時　　$a^4=1$　$b^4=c^4=8$　何れの時も　$x=2$

（解法 4B）5 乗根

$(b-c+1)^5=b^5-c^5+1$　で左辺は $(b-c+1)^4(b-c+1)$　として（解 3B）の結果を利用、b について整理すると b^5 の項は消える。

また前問同様 与式は因数定理から $c-1, b-c, b+1$　を因数に持つことがわかる。

$$4b^3(c-1)^2+b(c-1)^4-4b^4(c-1)-4b^2(c-1)^3+2b^3(c-1)^2-b^4c-4b^2c(c-1)^2$$
$$-c(c-1)^4+4b^3c(c-1)+4bc(c-1)^3-2b^2c(c-1)^2+b^4+4b^2(c-1)^2+(c-1)^4$$
$$-4b^3(c-1)-4b(c-1)^3+2b^2(c-1)^2+c^5-1=0$$

b^4 の係数：　$-4(c-1)-c+1=-5(c-1)$

b^3 の係数：　$6(c-1)^2+4c(c-1)-4(c-1)=10(c-1)^2$

b^2 の係数：　$-4(c-1)^3-6c(c-1)^2+6(c-1)^2=-10(c-1)^3$

b　の係数：　$(c-1)^4+4c(c-1)^3-4(c-1)^3=5(c-1)^4$

定 数 項 ：　$(c-1)\left\{-c(c-1)^3+(c-1)^3+c^4+c^3+c^2+c+1\right\}=5c(c-1)(c^2-c+1)$

-5 で両辺を割り $(c-1)$ を括り出すと

$$(c-1)\left\{b^4-2(c-1)b^3+2(c-1)^2b^2-(c-1)^3b-c(c^2-c+1)\right\}=0$$

以下　$b-c, b+1$ を持つから 順に組立除法により

$$(c-1)(b-c)\left\{b^3-(c-2)b^2+(c^2-2c+2)b+(c^2-c+1)\right\}=0$$

$$(c-1)(b-c)(b+1)\left\{b^2-(c-1)b+(c^2-c+1)\right\}=0$$

左辺第 4 項の判別式＝$-3(c-\frac{1}{3})^2-\frac{8}{3}<0$　より実数解はない。

1) $c=1$　の時　$a^5=b^5=-\frac{11}{3}$　これらから何れの場合も $x=-\frac{1}{3}$　が得られる。

2) $b=c$ の時　$a^5=1$　$b^5=c^5=8$　　これらからいずれの場合も $x=2$

3) $b=-1$ の時　　$c^5=-a^5=\dfrac{13}{5}$　　これらから何れの場合も $x=\dfrac{1}{5}$

　よって 掲題の方程式の解は　$x=2,\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{3}$

一般に冪根の n が偶数の時は $x=2,-\dfrac{1}{3}$ の 2 個、奇数の時は $x=2,\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{3}$ の 3 個と推定される。また冪根が $n=2$ でも、根号を含む x の整式に整数の係数が付くと a,b,c の連立方程式が複雑になり（解法 B）でも解けない場合が多い。況んや $n=5$ の時をや、である。1 文字を消去した式の因数分解の困難さ、高次方程式の解法の問題に関わってくる。 本例題は解ける特別なケースで 5 次以上の一般方程式の代数的解法同様解の公式はない、と思われる。関連して $n=2$ の時に検討済の可解な事例を別紙で紹介しているが、例 3 や 4 でも面倒な 4 次方程式が出てくる。

　また本稿作成の過程で出てきた面倒な因数分解 $(b-c+1)^5-b^5+c^5-1$ や a,b,c 表示の三元二次方程式の解法などは誘導形式で模試などの演習問題に使えるかも知れない。

以　上

（解 4B）の別解　　$\sqrt[5]{2x-3}=a$ などとして　$a^5+c^5=1+b^5$　　因数分解して

$$(a+c)(a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3+c^4)=(1+b)(b^4-b^3+b^2-b+1)$$

(解 2A)同様 $a+c=1+b=0$ (解は$x=\dfrac{1}{5}$) を利用し両辺の第 2 項を書換える。

$$\left\{(a+c)^2-2ac\right\}^2-ac\left\{(a+c)^2-2ac\right\}+a^2c^2 \;=(a+c)^4-5ac(a+c)^2+5a^2c^2$$

$=(b+1)^4-5b(b+1)^2+5b^2$ 係数比較し $b^2=a^2c^2$　$\sqrt[5]{(2x-3)^2(3x+2)^2}=\sqrt[5]{(5x-2)^2}$

両辺を 5 乗し平方に開いた時の複号の－は無縁根を与え不適、$3x^2-5x-2=0$ より

$x=2,-\dfrac{1}{3}$　与えられた方程式から 前者は $a^5=1, b^5=c^5=8$ の時、後者は $c^5=1$,

$a^5=b^5=-\dfrac{11}{3}$ の時。 これから $x=2,\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{3}$ が得られる。

　この解は原稿完成後思いつき 追記したもので、(解 2A) も同じように解けるが容易なため 掲載しなかった。

（別紙）　　　　　　冪根が$n=2$ の時、(解Ｂ)により可解な無理方程式の例

１．xの項、定数項が１回の平方で消えるもの

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x+2}=1+\sqrt{5x-2}$$

a　　　c　　　b　（２以降もこの順に表示、以下記載略）

$a-b+c=1$　　$a^2-b^2+c^2=1$　　$5a^2-2b^2=-11$

① $a=1$　$b^2=c^2=8 \Rightarrow x=2$　② $c=1$　$a^2=b^2=-\dfrac{11}{3} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$ の二組が解。

２．同上、定数項が１回の平方で消えるもの

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}=1+\sqrt{5x+5}$$

$a-b+c=1$　　$b^2-2a^2-c^2=-2$　　$2c^2-a^2=9$

① $a=1$ $b^2=c^2=5 \Rightarrow x=0$　② $a=2c-3$　$c=a=3$　$b=5 \Rightarrow x=4$ の二組が解。

３．右辺の無理式に係数2,定数が変化、１回の平方でxの項と定数項が消えないもの

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}=2+2\sqrt{2x-4}$$

$a-2b+c=2$　　$2b^2-a^2-2c^2=-19$　　$a^2-b^2=5$

c^2を消去し$6b^2+3a^2-8a(b+1)+64b-11=0$ を導き、$a^2=b^2+5$ を代入、

$a=\dfrac{9b^2+16b+4}{8(b+1)}$　第３式から$(b-2)(17b^3+194b^2+332b+152)=0$　第２項の

３次式は$b>0$ の正根を持たないから $c=3, b=2, a=3 \Rightarrow x=4$ 一組が解である。

４．１回の平方でxの項と定数項が消えないもの

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=2+\sqrt{5x-6}$$

$a-b+c=2$　　$b^2-2c^2-a^2=-13$　　$5c^2-2b^2=27$

a^2を消去し　$3c^2-2(b+2)c+4b-9=0$　$b=\dfrac{3c^2-4c-9}{2(c-2)}$　これから$(c^2-16c+33)$

$\times(c^2-9)=0$ 後者から　$b=3, c=3, a=2 \Rightarrow x=3$ また前者から　$a=4\pm\sqrt{31},$

$b=2(5\pm\sqrt{31}), c=8\pm\sqrt{31} \Rightarrow x=2(23\pm4\sqrt{31})$ の三組が解である。

一方 第２式は$b^2-c^2-3a^2=-12$ とも書けることに注意！　同様にa^2 を消去し

$(b-c)\{b-2(c-3)\}=0$ 後者を第３式に入れて　$c^2-16c+33=0$ と$b=c$ より

同様の答えを得る。