私の数学散歩道(32)

数実研会員　　村田　洋一

自作の未決作問解決への道は?

拙著「数学散歩道」で下記問題を考えました。
大体の問題はできましたが、肝心の一般の問題 2.で躓き今までも何回かチャレンジしてみましたがうまくいきません。どなたか明快な回答をお寄せいただければ幸いです。

ここでは途中までの流れの概要と、相談した先生からいただいたコメントをまとめてレポートとさせていただきます。

問題 1． $\sin x+\cos x=t(0<x<\dfrac{\pi}{2}), f_n(x)=\sin^n x+\cos^n x$ とする。

(1) $f_7(x), f_8(x)$ を t で表わせ。

(2) $f_{\mathrm{n}}(x)=\sin^n x+\cos^n x$ は n が偶数のとき偶関数、奇数のとき奇関数であることを証明し、その一般項を n と t で表わせ。

(3) c_k を $f_n(x)$ を t の関数で表したときの t^k の係数を表わすものとする。

c_2, c_4, c_6 及び $c_1, c_3 c_5$ を n の式で表わせ。

問題 2． 前記の関数 $f_n(x)=\sin^n x+\cos^n x(t=\sin x+\cos x, 0<x<\dfrac{\pi}{2})$ の t^k の係数 $\mathrm{c_k}$ の一般項をｎの偶奇によりｎとｋを使った一つの公式で表わせ。

問題 1.

(1) 条件より $\sin x+\cos x=t$ 平方・整理して $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

従って $f_4=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=-\dfrac{1}{2}t^4+t^2+\dfrac{1}{2}$ 以下同様に

f_7, f_8 以外、詳細な計算を略して $f_5=-\dfrac{1}{4}t^5+\dfrac{5}{4}t$ $f_6=-\dfrac{3}{4}t^4+\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{4}$

$$f_7=(\sin^5 x+\cos^5 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)-\sin^2 x\cos^2 x(\sin^3 x+\cos^3 x)=\frac{1}{8}t^7-\frac{7}{8}t^5+\frac{7}{8}t^3+\frac{7}{8}t$$

$$f_8=(\sin^5 x+\cos^5 x)(\sin^3 x+\cos^3 x)-\sin^3 x\cos^3 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=\frac{1}{8}t^8-\frac{1}{2}t^6-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{8}$$

$f_9 = \frac{1}{16}t^9 - \frac{9}{8}t^5 + \frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{16}t$　　　　$f_{10} = \frac{5}{16}t^8 - \frac{5}{4}t^6 + \frac{5}{8}t^4 + \frac{5}{4}t^2 + \frac{1}{16}$

$f_{11} = -\frac{1}{32}t^{11} + \frac{11}{32}t^9 - \frac{11}{16}t^7 - \frac{11}{16}t^5 + \frac{55}{32}t^3 + \frac{11}{32}t$

$f_{12} = -\frac{1}{32}t^{12} + \frac{3}{16}t^{10} + \frac{3}{32}t^8 - \frac{13}{8}t^6 + \frac{45}{32}t^4 + \frac{15}{16}t^2 + \frac{1}{32}$

f_n の変域は　$\frac{1}{\sqrt{2}} \le f_3 \le 1, \frac{1}{2} \le f_4 \le 1, \frac{1}{2\sqrt{2}} \le f_5 \le 1, \frac{1}{4} \le f_4 \le 1$・・・

などから $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}} \le f_n \le 1 (3 < n)$ となる。但し、（$n=1 \to \ 1 \le f_1 \le \sqrt{2}$,

$n=2 \to f_2 = 1$ の定数値関数）　証明略。

⑵ 上記の　f_n　の形から n が偶数のとき f_n は t　の偶関数、奇数のときは奇関数になると推定される。以降その証明とその中で得られた $f_{2n}(t)$ 、$f_{2n+1}(t)$ を t　で表わす一般公式を示す。

$\sin x + \cos x = t$,　$\sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$　より $\sin x, \cos x$　を解とする二次方程式は

$y^2 - ty + (t^2-1)/2 = 0$　これから　$y = (t \pm \sqrt{2-t^2})/2$

①　偶関数のとき　$f_{2n}(t) = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x$　とおけるから

$$f_{2n}(t) = \left(\frac{t+\sqrt{2-t^2}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{t-\sqrt{2-t^2}}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^n}\left\{ (1+t\sqrt{2-t^2})^n + (1-t\sqrt{2-t^2})^n \right\}$$

ここで　$f_{2n}(t) = f_{2n}(-t)$　で、$f_{2n}(t)$ の形から $\sin x$ 、$\cos x$ が入れ替わった逆のケースでも同じになるから、$f_{2n}(t)$　は偶関数である。

この場合　$f_{2n}(x) = \sin^{2n}(-x) + \cos^{2n}(-x) = \left\{\sin^2(-x)\right\}^n + \left\{\cos^2(-x)\right\}^n$

$= \sin^{2n} x + \cos^{2n} x$　から　$f_{2n}(x) = f_{2n}(-x)$ を簡単に示すことができる。

②　奇関数のとき　$f_{2n+1}(t) = \sin^{2n+1} x + \cos^{2n+1} x$　とおけるから　①と同様に

$$f_{2n+1}(t) = \left(\frac{t+\sqrt{2-t^2}}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{t-\sqrt{2-t^2}}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\left\{ (t+\sqrt{2-t^2})(1+t\sqrt{2-t^2})^n \right.$$

$$\left. + (t-\sqrt{2-t^2})(1-t\sqrt{2-t^2})^n \right\}$$　となる。

$$f_{2n+1}(-t)=\frac{1}{2^{n+1}}\left\{\ -(t-\sqrt{2-t^2})(1-t\sqrt{2-t^2})^n-(t+\sqrt{2-t^2})(1+t\sqrt{2-t^2})^n\ \right\}$$

より　$f_{2n+1}(t)=-f_{2n+1}(-t)$　で　$f_{2n+1}(t)$　は奇関数であることが証明された。

⑶ ①の一般項は $f_{2n}(t)$ を構成する第 1 項と第 2 項に二項定理を適用し展開してみると

$$(1+t\sqrt{2-t^2})^n={}_nC_0+{}_nC_1t(2-t^2)^{\frac{1}{2}}+{}_nC_2t^2(2-t^2)+{}_nC_3t^3(2-t^2)^{\frac{3}{2}}+{}_nC_4t^4(2-t^2)^2+\cdots$$

$$(1-t\sqrt{2-t^2})^n={}_nC_0-{}_nC_1t(2-t^2)^{\frac{1}{2}}+{}_nC_2t^2(2-t^2)-{}_nC_3t^3(2-t^2)^{\frac{3}{2}}+{}_nC_4t^4(2-t^2)^2+\cdots$$

辺々加えて　$2^nf_{2n}(t)=2{}_nC_0+2{}_nC_2t^2(2-t^2)+2{}_nC_4t^4(2-t^2)^2+2{}_nC_6t^6(2-t^2)^3+\cdots$

$$=2+4{}_nC_2t^2+(8{}_nC_4-2{}_nC_2)t^4+8(2{}_nC_6-{}_nC_4)t^6+\cdots$$

$$=2+2n(n-1)t^2+\frac{1}{3}n(n-1)(n^2-5n+3)t^4+\frac{1}{45}n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-9n+5)t^6+\cdots$$

t^k の係数を c_k として係数比較すると　$c_0=\dfrac{2}{2^n}$、 $c_2=\dfrac{2n(n-1)}{2^n}$

$c_4=\dfrac{n(n-1)(n^2-5n+3)}{3\cdot2^n}$,　$c_6=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-9n+5)}{45\cdot2^n}$ ・・・となる。

同様に ②の一般項は　$f_{2n+1}(t)$　の公式より

$$(t+\sqrt{2-t^2})(1+t\sqrt{2-t^2})^n={}_nC_0t+{}_nC_1t^2(2-t^2)^{\frac{1}{2}}+{}_nC_2t^3(2-t^2)+{}_nC_3t^4(2-t^2)^{\frac{3}{2}}+\cdots$$

$$+{}_nC_0(2-t^2)^{\frac{1}{2}}+{}_nC_1t(2-t^2)+{}_nC_2t^2(2-t^2)^{\frac{3}{2}}+{}_nC_3t^3(2-t^2)^2+\cdots$$

$$(t-\sqrt{2-t^2})(1-t\sqrt{2-t^2})^n={}_nC_0t-{}_nC_1t^2(2-t^2)^{\frac{1}{2}}+{}_nC_2t^3(2-t^2)-{}_nC_3t^4(2-t^2)^{\frac{3}{2}}+\cdots$$

$$-{}_nC_0(2-t^2)^{\frac{1}{2}}+{}_nC_1t(2-t^2)-{}_nC_2t^2(2-t^2)^{\frac{3}{2}}+{}_nC_3t^3(2-t^2)^2-\cdots$$

$$\therefore\ \ 2^{n+1}f_{2n+1}(t)=2{}_nC_0t+2{}_nC_2t^3(2-t^2)+2{}_nC_4t^5(2-t^2)^2+2{}_nC_6t^7(2-t^2)^3+\cdots$$

$$+2{}_nC_1t(2-t^2)+2{}_nC_3t^3(2-t^2)^2+2{}_nC_5t^5(2-t^2)^3+2{}_nC_7t^7(2-t^2)^4+\cdots$$

$$=(2{}_nC_0+4{}_nC_1)t+(4{}_nC_2-2{}_nC_1+8{}_nC_3)t^3+(16{}_nC_5+8{}_nC_4-8{}_nC_3-2{}_nC_2)t^5$$

$$+(32{}_nC_7+16{}_nC_6-24{}_nC_5-8{}_nC_4+2{}_nC_3)t^7+\cdots$$

これから$c_1=\dfrac{2{}_nC_1+{}_nC_0}{2^n}$，$c_3=\dfrac{4{}_nC_3+2{}_nC_2-{}_nC_1}{2^n}$，　$c_5=\dfrac{8{}_nC_5+4{}_nC_4-4{}_nC_3-{}_nC_2}{2^n}$

$c_7=\dfrac{16{}_nC_7+8{}_nC_6-12{}_nC_5-4{}_nC_4+{}_nC_3}{2^n}$　・・・となる。

具体的に数字を入れ対応する関数とチェックしてみる。

偶関数の場合、例えば$c_4=\dfrac{n(n-1)(n^2-5n+3)}{3\cdot 2^n}$ で$n=4,5,6$ とおくと各々$-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8},\dfrac{45}{32}$

と f_8, f_{10}, f_{12} におけるt^4 の係数になっている。同様にc_3 で$n=3,4,5$ とおくと

各々 $\dfrac{7}{8},\dfrac{3}{2},\dfrac{55}{32}$ で f_7, f_9, f_{11} における t^3 の係数であることが確認できる。

拙著「私の数学散歩道」のあとがきに某大学名誉教授からの下記の貴重なコメント（転載了解済）をいただいていますが、未だ解決に至らず慙愧に堪えません。

（コ メ ン ト；問題の関係分のみ）

・・・$\sin,\cos$ の累乗を倍角で表わす下記の公式は Euler の公式の累乗としても、あるいは数学的帰納法によっても容易に証明できます。その形にした上で、下記 Chebyshev の多項式による表示で　$\cos X\left(=\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ 但し$x-\dfrac{\pi}{4}=X$　$-\dfrac{\pi}{4}\leq X\leq\dfrac{\pi}{2}$

の関数に書き替えるのが一般項を求める早道かと存じます。Euler の公式も複素変数を使うのは、などといわず積極的に活用なさることをおすすめします。

（公　式）

$$\sin^{2n}\theta=\frac{1}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\ {}_{2n}C_k\cos(2n-2k)\theta+\frac{1}{2}\ {}_{2n}\mathrm{C}_n\right)$$

$$\sin^{2n+1}\theta=\frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\ {}_{2n+1}C_k\sin(2n-2k+1)\theta\right)$$

$$\cos^{2n}\theta=\frac{1}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n}C_k\cos(2n-2k)\theta+\frac{1}{2}\ {}_{2n}\mathrm{C}_n\right)$$

$$\cos^{2n+1}\theta=\frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{k=0}^{n}{}_{2n+1}C_k\cos(2n-2k+1)\theta\right)$$

$\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$ が

（第 1 種）Chebyshev の多項式（$T_n(x)$ はx のn 次多項式）

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{k\le\frac{n}{2}}(-1)^k\ {}_n\mathrm{C}_{2k}\,x^{n-2k}(1-x^2)^k$$

漸化式：$T_0(x)=1, T_1(x)=x, \quad T_{n+1}(X)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0$

母関数　$T_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n=\dfrac{1-t^2}{1-2tx+t^2}$

第 2 種 Chebyshev の多項式は本によって若干の差があるが、番号を一つずらして $\sin((n+1)\theta)=\sin\theta\cdot \mathrm{U}_n(\cos\theta)$ （$\mathrm{U}_n(x)$ は x の n 次多項式）とするのが自然と思う。

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{k\le\frac{n}{2}}(-1)^k\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{2k+1}\,x^{n-2k}(1-x^2)^k$$

漸化式：$U_0(x)=1, U_1(x)=2x, \quad U_{n+1}(x)-2xU_n(x)+U_{n-1}(x)=0$

母関数　$\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n=\dfrac{1}{1-2tx+t^2}$　・・・・・

以　上